Alkalmazott Matematikai Lapok **36** (2019), 131–143.

A LOGARITMIKUS LEGKISEBB NÉGYZETEK MÓDSZERÉNEK KARAKTERIZÁCIÓI

CSATÓ LÁSZLÓ

Többszempontú döntési problémák megoldása során gyakran szükségessé válik súlyvektor számítása a döntéshozó által megadott páros összehasonlítás mátrixból. Az e célra szolgáló módszerek közötti választás egyik lehetséges útja az axiomatikus megközelítés alkalmazása. A cikk az egyik legnépszerűbb eljárás, a logaritmikus legkisebb négyzetek módszere, valamint az ezáltal generált rangsor egy-egy axiomatikus karakterizációját mutatja be.

1. Bevezetés

Döntési problémák modellezésekor számtalan alkalommal találkozhatunk a páros összehasonlítások fogalmával: a döntéshozónak azt a kérdést tesszük fel, hányszor tekinti az egyik elemet jobbnak vagy nagyobbnak a másiknál. A kapott válaszok jellemzően nem teljesítik a *konzisztencia* követelményét, megtörténhet, hogy A alternatíva kétszer jobb, mint B, B pedig háromszor jobb C-nél, ennek ellenére A nem hatszor jobb C-nél. Ugyanez a jelenség előfordulhat objektív adatokból felírt páros összehasonlítás mátrixok esetén is, például országok rangsorolásánál [39], de a sportban sem ismeretlen a „körbeverés” jelensége [5, 10, 16, 19]. Ilyenkor egyáltalán nem triviális feladat az *inkonzisztens* páros összehasonlításokból adódó preferenciákat a legjobban közelítő súlyvektor meghatározása, az irodalomban nem véletlenül javasoltak különböző módszereket erre a célra [12].

Az eljárások közötti választás egyik lehetséges útja az axiomatikus megközelítés alkalmazása, vagyis néhány, a módszerektől „elvárt” tulajdonság bevezetése, majd annak vizsgálata, mely eljárások teljesítik azokat. [36] könyvében három lehetséges esetet említ az axiómák kapcsolatáról: (I) az axiómák ellentmondóak, egyetlen módszer sem elégítheti ki egyszerre mindegyiket; (II) pontosan egy módszer teljesíti az axiómákat, azok *karakterizálják* az adott eljárást; (III) az axiómák több módszer alkalmazását is megengedik. Ezentúl a leginkább „vágyott” (II) esetben, a karakterizáció bizonyításában meg szokás vizsgálni a felhasznált axiómák logikai függetlenségét, mert kiderülhet, esetleg kevesebb is elég a kívánt eredmény eléréséhez. Erre kiváló példa [9] eredménye a Kemény-távolság eredeti karakterizációjában szereplő egyik tulajdonság redundanciájáról.

Az utóbbi években hazai kutatók többször foglalkoztak bizonyos módszerek axiomatikus megalapozásával, elsősorban a játékelmélet területén. Az *Alkalmazott Matematikai Lapok* hasábjain [40] tárgyalta a Shapley-érték axiomatizálásait. [46] a Shapley-érték, [27] az arányos csődszabály, [45] egy szakértők kiválasztására alkalmas eljárás karakterizációját adta. [20] és [24] az első axiomatizációk a páros összehasonlítás mátrixok inkonzisztenciájának mérésében. A felsorolásból nem hiányozhatnak a lehetetlenségi tételek, az axiómák összeegyeztethetetlenségével kapcsolatos eredmények sem: [28] a kockázatelosztás, [22] és [23] a páros összehasonlításokon alapuló sport rangsorolás területén jutott „negatív" eredményre.

A következőkben a páros összehasonlítás mátrixok súlyvektorának számításával kapcsolatos axiomatizációkat tárgyalunk. Az 1. fejezet a főbb elméleti fogalmakat, az 1. fejezet az irodalmi előzményeket ismerteti. Az 1. fejezet a súlyozási módszerekre (1. alfejezet), illetve a rangsorolási eljárásokra (1. alfejezet) vonatkozó tulajdonságokat mutatja be. Tételeinket az 1. fejezetben mondjuk ki. Miután e cikk összefoglaló céllal íródott, a bizonyítások – nagyrészt technikai – részleteit nem közöljük, az érdeklődő olvasó a kapcsolódó munkákban [21, 25] megtalálja azokat. Végül az 1. fejezet néhány következtetést, ígéretes kutatási irányt fogalmaz meg.

2. A súlyvektor számítása

Célunk n alternatíva rangsorának meghatározása páronkénti összehasonlításaik alapján. Legyen a_{ij} az i alternatíva j alternatívához viszonyított relatív értékelése, a „Hányszor jobb az i alternatíva a j alternatívánál?" kérdésre adott numerikus válasz.

Jelölje $\mathbb{R}^n_+$ és $\mathbb{R}^{n \times n}_+$ a pozitív (minden elem nullánál nagyobb) n elemű vektorok és $n \times n$-es mátrixok halmazát. Legyen $N = \{1, 2, \dots, n\}$ az alternatívák halmaza.

2.1. Definíció. Páros összehasonlítás mátrix: Az $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}_+$ mátrix *páros összehasonlítás mátrix*, ha $a_{ji} = 1/a_{ij}$ minden $1 \le i, j \le n$-re.

Jelölje $\mathcal{A}^{n \times n}$ az $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrixok halmazát.

Az $\mathbf{A}$ páros összehasonlítás mátrixot *konzisztens*nek nevezzük, amennyiben $a_{ik} = a_{ij} a_{jk}$ minden $1 \le i, j, k \le n$ esetén. Ellenkező esetben a mátrix *inkonzisztens*. Egy $\mathbf{A}$ páros összehasonlítás mátrix akkor és csak akkor konzisztens, ha elemei előállnak az $a_{ij} = w_i / w_j$ alakban.

2.2. Definíció. Súlyvektor: A $\mathbf{w} = [w_i] \in \mathbb{R}^n_+$ vektor *súlyvektor*, ha

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

Legyen $\mathcal{R}^n$ az n elemű súlyvektorok halmaza.

2.3. Definíció. Súlyozási módszer: Az $f : \mathcal{A}^{n \times n} \to \mathcal{R}^n$ függvény egy *súlyozási módszer.*

A súlyozási módszer minden páros összehasonlítás mátrixhoz egy súlyvektort rendel. Az irodalomban számos különböző súlyozási módszert javasoltak (ismertetésüket lásd [12]), az egyik legnépszerűbb az alábbi.

2.4. Definíció. Logaritmikus legkisebb négyzetek módszere ($LLSM$) [14, 15, 29, 30, 41]: A *logaritmikus legkisebb négyzetek módszere* az $\mathbf{A} \to \mathbf{w}^{LLSM}(\mathbf{A})$ függvény, ahol a $\mathbf{w}^{LLSM}(\mathbf{A})$ súlyvektor a következő optimalizálási feladat megoldása:

$$\min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n_+,\, \sum_{i=1}^n w_i = 1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\log a_{ij} - \log \left(\frac{w_i}{w_j} \right) \right]^2 . \tag{1}$$

Az $LLSM$-et mértani közép módszernek is nevezik, mert (1) optimuma a sorelemek mértani közepeinek normalizálásával kapható:

$$w_i^{LLSM}(\mathbf{A}) = \frac{\prod_{j=1}^n a_{ij}^{1/n}}{\sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^n a_{kj}^{1/n}} .$$

A súlyozási módszerek használata gyakran csak az alternatívák *rangsor*ának meghatározását célozza. A $\succeq$ rangsor egy teljes ($i \succeq j$ vagy $i \preceq j$ minden $i, j \in N$ esetén) előrendezés, azaz reflexív ($i \succeq i$ minden $i \in N$-re) és tranzitív (bármely $i, j, k \in N$-re: $i \succeq j$ és $j \succeq k$ esetén $i \succeq k$) bináris reláció az alternatívák N halmazán.

A $\succeq$ rangsor aszimmetrikus és szimmetrikus részeit $\succ$ és $\sim$ jelöli: $i \succ j$ akkor és csak akkor, ha $i \succeq j$ teljesül, de $j \succeq i$ nem; $i \sim j$ pedig pontosan akkor, ha $i \succeq j$ és $j \succeq i$.

Legyen $\mathfrak{R}^n$ az n alternatíva összes lehetséges rangsorainak halmaza.

2.5. Definíció. Rangsorolási módszer: A $g : \mathcal{A}^{n \times n} \to \mathfrak{R}^n$ függvény egy *rangsorolási módszer.*

A rangsorolási módszer minden páros összehasonlítás mátrixhoz hozzárendeli az alternatívák egy rangsorát. A továbbiakban $\succeq^g_{\mathbf{A}}$ a g rangsorolási módszer $\mathbf{A}$ páros összehasonlítás mátrixra történő alkalmazásának eredményét jelöli.

Világos, hogy minden súlyozási módszer egyértelműen meghatároz egy rangsorolási módszert. Például a $\succeq^{LLSM}$ *logaritmikus legkisebb négyzetek rangsorolási módszer* esetén $i \succeq^{LLSM}_{\mathbf{A}} j$ akkor és csak akkor, ha $w_i^{LLSM}(\mathbf{A}) \geq w_j^{LLSM}(\mathbf{A})$. Egy rangsorolási módszer azonban több súlyozási módszer eredményeként is előállhat.

A társadalmi választások elméletében jól ismert rangsorolási módszer [11, 35] fogalmát [18] alkalmazta a páros össszehasonlítás mátrixok tárgyalásában, bár korábban egyes szerzők implicit módon használták azt (lásd például [26, 34, 38, 44]).

3. A súlyozási módszerek karakterizációi

A páros összehasonlítás mátrixok súlyvektorának számítására természetesen már szintén többször alkalmazták az axiomatikus megközelítést. Valószínűleg az első ilyen munka [32] a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerének karakterizálásáról. Az ehhez szükséges négy tulajdonság, a korrekt eredmény a konzisztens esetben (correct result in the consistent case), az összehasonlítás sorrendjére való invariancia (comparison order invariance), a simaság (smoothness) és a hatványozás invariancia (power invariance).[1] [33, Theorem 2] értelmében a hatványozás invariancia kicserélése a rangsor megőrzés (rank preservation) követelményre a [42, 43] által javasolt *sajátvektort módszer*t karakterizálja.

Az axiómák közül az első kettő aligha vitatható. [8] azonban egy olyan célprogramozási módszert mutat, mely invariáns a hatványozásra is, és teljesíti a simaság egy szerintünk természetesebb, alternatív megfogalmazását (a deriválható függvények és folytonos deriváltak segítségével történő leírás helyett annak megkövetelése, hogy a mátrixelemek kis változása a súlyvektorban se eredményezhessen nagy változást), továbbá egy outlier megléte még nem akadályozza meg az eredeti preferenciavektor azonosítását. [13] egy újabb célprogramozási eljárást karakterizált.

A simaság és a hatványozás-invariancia akár teljes egészében elhagyható a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerének axiomatizálásából. Ezeket [3] egy konzisztenciaszerű követelményre cseréli: a súlyvektornak ugyanannak kell lennie, ha több páros összehasonlítás mátrix aggregáltjából számítjuk, vagy a prioritásokat egyenként határozzuk meg az egyes mátrixokra, majd ezeket a mértani közép módszerrel összegezzük. [2] ezen axiómát és az összehasonlítás sorrendjére való invarianciát egyetlen tulajdonsággal helyettesíti, miszerint az alternatívák súlya csak a páros összehasonlítás mátrix megfelelő sorától függhet. [31]-hez hasonlóan ezt kissé mesterséges feltételnek tartjuk.

A fenti eredmények alapján a páros összehasonlítás mátrixokból származó súlyvektor meghatározásának problémája axiomatikus szempontból sem tűnik lezártnak. Jelen cikk ehhez a kérdéshez szeretne hozzájárulni a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerének két karakterizációját bemutatva. Az első az eljárásra mint súlyozási módszerre vonatkozik, a két axióma közül az egyik szinte természetes elvárás, a másik pedig egyfajta lokális jól viselkedést követel meg. Miután az utóbbi nem feltétlenül vitathatatlan követelmény, ez az axiomatizáció inkább a módszer jobb megértését segítheti. A második karakterizációs eredmény az alternatívák logaritmikus legkisebb négyzetek módszerével kapott rangsorára vonatkozik, miután a javasolt axiómák csak az alternatívák relatív viszonyát veszik figyelembe. Itt mindhárom tulajdonság jól indokolható, sőt, a bizonyításban központi szerepet játszó axióma a többszempontú döntéselmélet Analytic Hierarchy Process (AHP)

[1] A korábbi karakterizációkban használt tulajdonságok közül csak azokat vezetjük be formálisan az 1. fejezetben, melyek jelen cikk szempontjából jelentőséggel bírnak.

módszerének „atyja”, Thomas L. Saaty egyik – Aczél Jánossal közös – nevezetes eredményén [1] alapul.

4. Axiómák

Ez a fejezet néhány súlyozási, illetve rangsorolási módszerrel szembeni követelményt ismertet.

4.1. Súlyozási módszerek tulajdonságai

4.1. Axióma. Korrektség (correctness, CR): Legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{A}^{n\times n}$ egy konzisztens páros összehasonlítás mátrix. Az $f : \mathcal{A}^{n\times n} \to \mathcal{R}^n$ súlyozási módszer *korrekt*, ha $f_i(\mathbf{A})/f_j(\mathbf{A}) = a_{ij}$ minden $1 \leq i, j \leq n$-re.

A CR axióma megköveteli, hogy a súlyvektor minden konzisztens páros összehasonlítás mátrix esetén a mátrixot generáló vektor legyen. A tulajdonságot [32] vezette be *korrekt eredmény a konzisztens esetben* (correct result in the consistent case) néven, és többek között [2], [3], valamint [33] használta.

4.1. Segédtétel. *A logaritmikus legkisebb négyzetek módszere teljesíti a CR axiómát.*

4.1. Definíció. α-transzformáció egy triádon (α-transformation on a triad): Legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{A}^{n\times n}$ egy páros összehasonlítás mátrix, $1 \leq i, j, k \leq n$ pedig három különböző alternatíva. Az (i, j, k) hármason (triádon) végrehajtott *α-transzformáció* eredménye az $\hat{\mathbf{A}} \in \mathcal{A}^{n\times n}$ páros összehasonlítási mátrix, ahol $\hat{a}_{ij} = \alpha a_{ij}$ $(\hat{a}_{ji} = a_{ji}/\alpha)$, $\hat{a}_{jk} = \alpha a_{jk}$ $(\hat{a}_{kj} = a_{kj}/\alpha)$, $\hat{a}_{ki} = \alpha a_{ki}$ $(\hat{a}_{ik} = a_{ik}/\alpha)$ és $\hat{a}_{\ell m} = a_{\ell m}$ minden más elemre.

A triádon végzett α-transzformáció három mátrixelemet módosít egy kör mentén. Az $\alpha = \sqrt[3]{a_{ik}/(a_{ij}a_{jk})}$ paraméterválasztással az i, j, k alternatívák vonatkozásában megteremthető a lokális konzisztencia, hiszen ekkor $\hat{a}_{ij}\hat{a}_{jk} = \alpha^2 a_{ij}a_{jk} = a_{ik}/\alpha = \hat{a}_{ik}$. Ugyanakkor ez a változtatás „elronthatja” más alternatívahármasok konzisztenciáját.

4.2. Axióma. α-transzformációtól való függetlenség egy triádon (invariance to α-transformation on a triad, ITT): Legyen $\mathbf{A}, \hat{\mathbf{A}} \in \mathcal{A}^{n\times n}$ két páros összehasonlítási mátrix úgy, hogy $\hat{\mathbf{A}}$ megkapható az $\mathbf{A}$ mátrix egy triádján végzett α-transzformációval. Az $f : \mathcal{A}^{n\times n} \to \mathcal{R}^n$ súlyozási módszer *független a triádon végrehajtott α-transzformációra nézve*, ha $f(\mathbf{A}) = f(\hat{\mathbf{A}})$.

Az ITT axióma fennállásakor a súlyvektort nem befolyásolják a triádokon végzett α-transzformációk. A tulajdonság bevezetését [4] *körfüggetlenség* (independence of circuits) nevű axiómája inspirálta (magyar nyelven lásd [17]).

Az e transzformációtól való függetlenség megkövetelése az alábbi érveléssel indokolható. Tekintsünk egy sportversenyt, ahol i játékos legyőzte j-t, j legyőzte k-t, végül k legyőzte i-t, vagyis a három játékos „körbeverte" egymást. Legyen mindhárom győzelem és vereség egyenértékű. A játékosok rangsorát észszerűnek tűnik változatlanul hagyni, amennyiben a három mérkőzés eredményét ugyanolyan mértékben és irányban módosítjuk. Például mindegyiket az ellenkezőjére fordíthatjuk (azaz immár i ugyanolyan arányú vereséget szenved j-től, mint j játékos k-tól, k pedig i-től), vagy döntetlenre változtathatjuk azokat. Az ITT axióma lényegében ezen elvárás formalizálása.

4.2. Rangsorolási módszerek tulajdonságai

4.3. Axióma. Anonimitás (anonymity, ANO): Legyen $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathcal{A}^{n \times n}$ egy páros összehasonlítás mátrix, $\sigma : N \to N$ az alternatívák halmazának egy permutációja, míg $\sigma(\mathbf{A}) = [\sigma(a)_{ij}] \in \mathcal{A}^{n \times n}$ az $\mathbf{A}$-ból ezen permutáció révén kapható páros összehasonlítás mátrix, azaz $\sigma(a)_{ij} = a_{\sigma(i)\sigma(j)}$. A $g : \mathcal{A}^{n \times n} \to \mathfrak{R}^n$ rangsorolási módszer *anonim*, ha $i \succeq^g_{\mathbf{A}} j \iff \sigma(i) \succeq^g_{\sigma(\mathbf{A})} \sigma(j)$ minden $1 \leq i, j \leq n$-re.

Az anonimitás értelmében az alternatívák rangsora nem függhet azok elnevezésétől. Ezt a tulajdonságot – súlyozási módszerek esetén – [32] *az összehasonlítás sorrendjére való invariancia* (comparison order invariance) néven vezette be.

4.2. Definíció. Páros összehasonlítás mátrixok aggregálása (aggregation of pairwise comparison matrices): Legyenek

$$\mathbf{A}^{(1)} = \left[a^{(1)}_{ij} \right] \in \mathcal{A}^{n \times n}$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \left[a^{(2)}_{ij} \right] \in \mathcal{A}^{n \times n}, \ldots, \mathbf{A}^{(k)} = \left[a^{(k)}_{ij} \right] \in \mathcal{A}^{n \times n}$$

páros összehasonlítás mátrixok. Az ezekből képzett *aggregált* páros összehasonlítás mátrix a következő:

$$\mathbf{A}^{(1)} \oplus \mathbf{A}^{(2)} \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}^{(k)} = \left[\sqrt[k]{a^{(1)}_{ij} a^{(2)}_{ij} \cdots a^{(k)}_{ij}} \right] \in \mathcal{A}^{n \times n}.$$

Tehát páros összehasonlítás mátrixok aggregálása az azonos pozíciójú mátrixelemek mértani közepei által meghatározott páros összehasonlítás mátrixhoz vezet. [1] axiomatikus érveléssel bizonyítja, hogy a mértani közép az egyetlen „ jól viselkedő" aggregáló módszer, mert nem létezik más olyan kváziaritmetikai közép, mely teljesítené a reciprocitás és a pozitív homogenitás követelményét. A reciprocitás értelmében a mátrixelemek összegzése, majd invertálása ugyanazt az eredményt adja, mint az egyenkénti invertálás, és az ezt követő aggregálás. Ez a tulajdonság garantálja az aggregált mátrix páros összehasonlítás mátrix voltát (2.1. definíció). A pozitív homogenitás szerint pedig az összegzendő mátrixelemek mindegyikének ugyanazon pozitív konstanssal történő megszorzása az aggregált mátrix megfelelő elemét is ezzel arányosan változtatja meg.

4.4. Axióma. Aggregálás invariancia (aggregation invariance, AI): Legyenek $\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \ldots, \mathbf{A}^{(k)} \in \mathcal{A}^{n \times n}$ páros összehasonlítás mátrixok, $g : \mathcal{A}^{n \times n} \to \mathfrak{R}^n$ pedig egy olyan rangsorolási módszer, hogy $i \succeq^g_{\mathbf{A}^{(\ell)}} j$ minden $1 \leq \ell \leq k$-re. Ekkor *g aggregálás invariáns*, ha $i \succeq^g_{\mathbf{A}^{(1)} \oplus \mathbf{A}^{(2)} \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}^{(k)}} j$, valamint $i \succ^g_{\mathbf{A}^{(1)} \oplus \mathbf{A}^{(2)} \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}^{(k)}} j$, amennyiben $i \succ^g_{\mathbf{A}^{(\ell)}} j$ legalább egy $1 \leq \ell \leq k$ esetén.

A Pareto-elvnek is nevezett, ebben a formában [21] által javasolt AI axióma a csoportos döntéshozatal kézenfekvő feltétele: amikor a döntéshozók egyetértenek abban, hogy az i alternatíva nem rosszabb j-nél, akkor ezt a relációt – az egyéni vélemények összegzésével kapott – aggregált preferenciáknak is tükröznie kell.

4.5. Axióma. Reszponzivitás (responsiveness, RES): Legyenek $\mathbf{A}, \mathbf{A}' \in \mathcal{A}^{n \times n}$ páros összehasonlítás mátrixok, míg $1 \leq i, j \leq n$ két különböző alternatíva úgy, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}'$ minden eleme azonos $a'_{ij} > a_{ij}$ ($a'_{ji} < a_{ji}$) kivételével. A

$$g : \mathcal{A}^{n \times n} \to \mathfrak{R}^n$$

rangsorolási módszer *reszponzív*, ha $i \succeq^g_{\mathbf{A}} j \Rightarrow i \succ^g_{\mathbf{A}'} j$.

A reszponzivitás – egy természetesnek tűnő monotonitási tulajdonság – értelmében, amennyiben az i alternatíva nem rosszabb j-nél, akkor szigorúan preferálttá kell válnia, miután egymással szembeni páros összehasonlításuk eredménye i számára kedvezően változik.

5. Axiomatizációk

Az alábbiakban a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerét karakterizáljuk.

5.1. Az *LLSM* mint súlyozási módszer

Az 1. fejezetben bemutatott, súlyozási módszerekre vonatkozó két tulajdonság már elegendő egy eljárás egyértelmű meghatározásához.

5.1. Tétel. *A logaritmikus legkisebb négyzetek módszere az egyetlen korrekt és egy triádon végrehajtott α-transzformációra nézve független súlyozási módszer.*

Bizonyítás. Lásd [25, Theorem 4.1]. □

Miután az 5.1. tétel karakterizációja csak két tulajdonságot használ, inkább technikai jelentőségű az alábbi eredmény.

5.1. Segédtétel. *CR és ITT logikailag független axiómák.*

Bizonyítás. Lásd [25, Proposition 4.1]. □

Az 5.1. tétel fő üzenete, hogy a logaritmikus legkisebb négyzetek módszere egyszerre rendelkezik jó lokális (ITT) és globális (CR) tulajdonságokkal. Ez az egyetlen olyan eljárás, amely nem „romlik el” akkor, ha a páros összehasonlítás mátrix vágyott konzisztenciáját „mohó” módon, mindig csak egy-egy alternatívahármasra összpontosítva szeretnénk helyreállítani, miközben nem engedjük meg a súlyvektor változását. Ez azért lehet némileg meglepő, ugyanakkor egyértelműen kedvező eredmény, mert első látásra egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy a konzisztencia lokális helyreállítása, egy-egy triád „kijavítása” ne súlyosbítaná helyrehozhatatlanul a mátrix többi részén meglevő inkonzisztenciát (vagy rontaná el a kezdetben meglevő konzisztenciát). Ilyen értelemben az $LLSM$ eljárással kapott súlyvektor nevezhető a triádon végzett α-transzformáció fixpontjának.

Az 5.1. tétel szerint, ha valaki nem ért egyet a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerének használatával, akkor a CR és ITT axiómák közül legalább az egyiket el kell utasítania. A korrektség elhagyása nehezen védhető. A triádon végrehajtott α-transzformációtól való függetlenségről adott esetben le lehet mondani, bár ezzel elveszítjük a fenti egyszerű iteratív eljárás alkalmazhatóságát.

5.2. Az $LLSM$ mint rangsorolási módszer

A 1 fejezetben ismertetett három tulajdonság segítségével karakterizálható egy rangsorolási módszer.

5.2. TÉTEL. *A logaritmikus legkisebb négyzetek rangsorolási módszere az egyetlen anonim, aggregálásinvariáns és reszponzív rangsorolási módszer.*

Bizonyítás. Lásd [21, Theorem 1]. □

A tételben szereplő tulajdonságok egyike sem nélkülözhető.

5.2. SEGÉDTÉTEL. *ANO, AI és RES logikailag független axiómák.*

Bizonyítás. Lásd [21, Proposition 3]. □

Az 5.2. tétel alapján az $LLSM$ eljárás elvetéséhez az ANO, AI és RES tulajdonságok valamelyikét fel kell áldozni. Az anonimitás elhagyása megmagyarázhatatlan. Az aggregálás invariancia alapja [1] híres eredménye.[2] Végül, a reszponzivitás feladása ellentmond a páros összehasonlítás mátrix elemeinek tulajdonított jelentésnek. Minden bizonnyal bármelyik vállalati döntéshozó rövid úton elbocsátaná azt a pénzügyi tanácsadóját, aki megpróbálná megmagyarázni, hogy azért kell kevesebb pénzt szánni egy projektre, mert annak relatív hozama (változatlan piaci körülmények, például azonos kockázat mellett) váratlanul nagyobb lett.

[2] A hivatkozott cikk 2019. február 27-én 921 hivatkozással rendelkezett a Google Scholar, és 370-nel a Web of Science összesítése alapján.

6. Összefoglalás

Az előzőekben a páros összehasonlítás mátrixok súlyvektorának meghatározására szolgáló egyik eljárás, a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerével kapcsolatos két karakterizációt ismertettünk. Mindegyik hatásos érvekkel szolgál az $LLSM$ eljárás alkalmazása mellett, mely az itt tárgyaltakon túl számos kedvező tulajdonsággal rendelkezik (lásd például [2, 3, 31, 32, 33, 37]).

Ugyanakkor fontos felhívni a figyelmet arra, hogy a bemutatott axiomatizációk csak az összes páros összehasonlítás mátrix halmazán érvényesek. Első ránézésre ennél szűkebb osztályok választása nem jelenthet gondot, ez azonban tévedés [40]: két, egyébként különböző súlyozási vagy rangsorolási eljárás egy kisebb halmazon már egybeeshet, így ott nem feltétlenül az $LLSM$ lesz az *egyetlen* olyan módszer, ami az összes axiómát teljesíti. Például konzisztens páros összehasonlítás mátrixok esetén az ITT axióma triviális módon teljesül, vagyis minden korrekt súlyozási módszer azonos a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerével, így az 5.1. tétel állításának egyértelműségre vonatkozó része hamis.

Talán érdekesebb kérdés, vajon mi a helyzet egy bővebb halmazon, a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokén, ahol bizonyos összehasonlítások ismeretlenek is lehetnek. A célfüggvény okán a logaritmikus legkisebb négyzetek módszere minden nehézség nélkül kiterjeszthető erre az osztályra [6], miközben az eljárás bizonyos tulajdonságai érvényesek maradnak [7]. Ez az általánosítás azonban már egy másik kutatás témája lehet.

Köszönetnyilvánítás

A szerző köszönettel tartozik *Denis Bouyssou*nak az első karakterizációhoz nyújtott inspirációért, *Bozóki Sándor*nak a páros összehasonlítás mátrixok, *Pintér Miklós*nak pedig az axiomatikus tárgyalás megismertetéséért, valamint a Budapesti Corvinus Egyetem 2017. március 17-i játékelméleti szemináriuma résztvevőinek az ott elhangzott értékes megjegyzésekért.

A kutatást a K 111797 számú OTKA pályázat és az MTA Prémium posztdoktori kutatói program támogatta.

Hivatkozások

[1] Aczél, J. and Saaty, T. L.: *Procedures for synthesizing ratio judgements*, Journal of Mathematical Psychology, Vol. **27** No. **1**, pp. 93-102 (1983).

[2] Barzilai, J.: *Deriving weights from pairwise comparison matrices*, Journal of the Operational Research Society, Vol. **48** No. **12**, pp. 1226-1232 (1997).

[3] Barzilai, J., Cook, W. D., and Golany, B.: *Consistent weights for judgements matrices of the relative importance of alternatives*, Operations Research Letters, Vol. **6** No. **3**, pp. 131-134 (1987).

[4] Bouyssou, D.: *Ranking methods based on valued preference relations: A characterization of the net flow method*, European Journal of Operational Research, Vol. **60** No. **1**, pp. 61-67 (1992).

[5] Bozóki, S., Csató, L., and Temesi, J.: *An application of incomplete pairwise comparison matrices for ranking top tennis players*, European Journal of Operational Research, Vol. **248** No. **1**, pp. 211-218 (2016).

[6] Bozóki, S., Fülöp, J., and Rónyai, L.: *On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices*, Mathematical and Computer Modelling, Vol. **52** No. **1-2**, pp. 318-333 (2010).

[7] Bozóki, S. and Tsyganok, V.: *The (logarithmic) least squares optimality of the arithmetic (geometric) mean of weight vectors calculated from all spanning trees for incomplete additive (multiplicative) pairwise comparison matrices*, International Journal of General Systems, Vol. **48** No. **4**, pp. 362-381 (2019).

[8] Bryson, N.: *A goal programming method for generating priority vectors*, Journal of the Operational Research Society, Vol. **46** No. **5**, pp. 641-648 (1995).

[9] Can, B. and Storcken, T.: *A re-characterization of the Kemeny distance*, Techn. Ber. RM/13/009, Maastricht University School of Business and Economics, Graduate School of Business and Economics (2013).

[10] Chao, X., Kou, G., Li, T., and Peng, Y.: *Jie Ke versus AlphaGo: A ranking approach using decision making method for large-scale data with incomplete information*, European Journal of Operational Research, Vol. **265** No. **1**, pp. 239-247 (2018).

[11] Chebotarev, P. Yu. and Shamis, E.: *Characterizations of scoring methods for preference aggregation*, Annals of Operations Research, Vol. **80**, pp. 299-332 (1998).

[12] Choo, E. U. and Wedley, W. C.: *A common framework for deriving preference values from pairwise comparison matrices*, Computers & Operations Research, Vol. **31** No. **6**, pp. 893-908 (2004).

[13] Cook, W. D. and Kress, M.: *Deriving weights from pairwise comparison ratio matrices: An axiomatic approach*, European Journal of Operational Research, Vol. **37** No. **3**, pp. 355-362 (1988).

[14] Crawford, G. and Williams, C.: *Analysis of subjective judgment matrices*, Interim report R-2572-AF, Rand Corporation, Santa Monica (1980).

[15] Crawford, G. and Williams, C.: *A note on the analysis of subjective judgment matrices*, Journal of Mathematical Psychology, Vol. **29** No. **4**, pp. 387-405 (1985).

[16] Csató, L.: *Ranking by pairwise comparisons for Swiss-system tournaments*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **21** No. **4**, pp. 783-803 (2013).

[17] Csató, L.: *A páros összehasonlításokon alapuló rangsorolás módszertani és alkalmazási kérdései*, Dissertation, Corvinus University of Budapest (2015).

[18] Csató, L.: *Eigenvector Method and rank reversal in group decision making revisited*, Fundamenta Informaticae, Vol. **156** No. **2**, pp. 169-178 (2017).

[19] Csató, L.: *On the ranking of a Swiss system chess team tournament*, Annals of Operations Research, Vol. **254** No. **1-2**, pp. 17-36 (2017).

[20] Csató, L.: *Characterization of an inconsistency ranking for pairwise comparison matrices*, Annals of Operations Research, Vol. **261** No. **1-2**, pp. 155-165 (2018).

[21] Csató, L.: *Characterization of the row geometric mean ranking with a group consensus axiom*, Group Decision and Negotiation, Vol. **27** No. **6**, pp. 1011-1027 (2018).

[22] Csató, L.: *An impossibility theorem for paired comparisons*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **27** No. **2**, pp. 497-514 (2019).

[23] Csató, L.: *Some impossibilities of ranking in generalized tournaments*, International Game Theory Review, Vol. **21** No. **1**, 1940002 (2019).

[24] Csató, L.: *Axiomatizations of inconsistency indices for triads* (2019), kézirat. arXiv: 1801.03355.

[25] Csató, L.: *A characterization of the Logarithmic Least Squares Method*, European Journal of Operational Research, Vol. **276** No. **1**, pp. 212-216 (2019).

[26] Csató, L. and Rónyai, L.: *Incomplete pairwise comparison matrices and weighting methods*, Fundamenta Informaticae, Vol. **144** No. **3-4**, pp. 309-320 (2016).

[27] Csóka, P.: *Az arányos csődszabály karakterizációja körbetartozások esetén*, Közgazdasági Szemle, Vol. **LXIV** No. **8**, pp. 930-942 (2017).

[28] Csóka, P. and Pintér, M.: *On the impossibility of fair risk allocation*, The BE Journal of Theoretical Economics, Vol. **16** No. **1**, pp. 143-158 (2016).

[29] De Graan, J. G.: *Extensions of the multiple criteria analysis method of T. L. Saaty*, Report, National Institute for Water Supply, Voorburg (1980).

[30] de Jong, P.: *A statistical approach to Saaty's scaling method for priorities*, Journal of Mathematical Psychology, Vol. **28** No. **4**, pp. 467-478 (1984).

[31] Dijkstra, T. K.: *On the extraction of weights from pairwise comparison matrices*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **21** No. **1**, pp. 103-123 (2013).

[32] Fichtner, J.: *Some thoughts about the mathematics of the Analytic Hierarchy Process*, Techn. Ber., Institut für Angewandte Systemforschung und Operations Research, Universität der Bundeswehr München (1984).

[33] Fichtner, J.: *On deriving priority vectors from matrices of pairwise comparisons*, Socio-Economic Planning Sciences, Vol. **20** No. **6**, pp. 341-345 (1986).

[34] Genest, C., Lapointe, F., and Drury, S. W.: *On a proposal of Jensen for the analysis of ordinal pairwise preferences using Saaty's eigenvector scaling method*, Journal of Mathematical Psychology, Vol. **37** No. **4**, pp. 575-610 (1993).

[35] González-Díaz, J., Hendrickx, R., and Lohmann, E.: *Paired comparisons analysis: an axiomatic approach to ranking methods*, Social Choice and Welfare, Vol. **42** No. **1**, pp. 139-169 (2014).

[36] Kemeny, J. G. and Snell, L. J.: *Preference ranking: an axiomatic approach*, in: *Mathematical Models in the Social Sciences*, pp. 9-23, Ginn, New York (1962).

[37] Lundy, M., Siraj, S., and Greco, S.: *The mathematical equivalence of the "spanning tree" and row geometric mean preference vectors and its implications for preference analysis*, European Journal of Operational Research, Vol. **257** No. **1**, pp. 197-208 (2017).

[38] Pérez, J. and Mokotoff, E.: *Eigenvector priority function causes strong rank reversal in group decision making*, Fundamenta Informaticae, Vol. **144** No. **3-4**, pp. 255-261 (2016).

[39] Petróczy, D. G.: *Egy életminőség-rangsor a hazautalások alapján*, in: *XV. Gazdaságmodellezési Szakértői Konferencia - Előadások*, pp. 97-106, Gazdaságmodellezési Társaság, Budapest (2018).

[40] Pintér, M.: *A Shapley-érték axiomatizálásai*, Alkalmazott Matematikai Lapok, Vol. **26** No. **3**, pp. 289-315 (2009).

[41] Rabinowitz, G.: *Some comments on measuring world influence*, Conflict Management and Peace Science, Vol. **2** No. **1**, pp. 49-55 (1976).

[42] Saaty, T. L.: *A scaling method for priorities in hierarchical structures*, Journal of Mathematical Psychology, Vol. **15** No. **3**, pp. 234-281 (1977).

[43] Saaty, T. L.: *The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resource Allocation*, McGraw-Hill, New York (1980).

[44] Saaty, T. L. and Vargas, L. G.: *Inconsistency and rank preservation*, Journal of Mathematical Psychology, Vol. **28** No. **2**, pp. 205-214 (1984).

[45] Sziklai, B.: *How to identify experts in a community?*, International Journal of Game Theory, Vol. **47** No. **1**, pp. 155-173 (2018).

[46] van den Brink, R. and Pintér, M.: *On axiomatizations of the Shapley value for assignment games*, Journal of Mathematical Economics, Vol. **60**, pp. 110-114 (2015).

Csató László 1987-ben született. A Budapesti Corvinus Egyetem gazdaságelemzés BSc (2009) és gazdaság-matematikai elemző MSc (2011) szakán végzett. PhD fokozatát a Budapesti Corvinus Egyetemen szerezte 2015-ben, Fülöp János és Temesi József témavezetésével. Elismerései: BCE Kutatási Kiválósági Díj (2016), MTA Prémium posztdoktori kutatói program (2016-2019), Farkas Gyula-emlékdíj (2018). 2011 óta oktat a BCE Operációkutatás és Aktuáriustudományok tanszékén, 2017-től egyetemi adjunktusként, emellett 2016 óta az MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési rendszerek Kutatócsoportjának tudományos munkatársa. Fő kutatási területei a döntéselmélet, a játékelmélet és az operációkutatás a sportban. 14 angol nyelvű, köztük 13 impakt faktoros cikket publikált, ebből 12-t önállóan.

Magyar Tudományos Akadémia
Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézet
1111 Budapest, Kende utca 13-17.
csato.laszlo@sztaki.mta.hu

Budapesti Corvinus Egyetem
Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék
1093 Budapest, Fővám tér 13-15.
laszlo.csato@uni-corvinus.hu

CHARACTERIZATIONS OF THE LOGARITHMIC LEAST SQUARES METHOD

László Csató

An axiomatic approach is applied for the problem of extracting weights or rankings of the alternatives from a pairwise comparison ratio matrix. First, we provide an axiomatic characterization of the Logarithmic Least Squares Method, which is sometimes called row geometric mean. This procedure is shown to be the only one satisfying correctness in the consistent case, which requires the reproduction of the inducing vector for any consistent matrix, and invariance to a specific transformation on a triad, that is, the weight vector is not influenced by an arbitrary multiplication of matrix elements along a 3-cycle by a positive scalar. Second, it is proved that the ordering induced by this method is uniquely determined by three independent axioms, anonymity (independence of the labelling of alternatives), responsiveness (a kind of monotonicity property) and aggregation invariance, which demands the preservation of the pairwise ranking between two alternatives if unanimous individual preferences are combined by geometric mean.

Keywords: decision analysis; pairwise comparisons; ranking; geometric mean; axiomatic approach; characterization.

Mathematics Subject Classification (2000): 90B50, 91B08.