

Páronként érintkező hengerek

Bozóki Sándor*, Rónyai Lajos**, Tsung-Lin Lee***

*MTA SZTAKI, BCE, Budapest

**MTA SZTAKI, BME, Budapest

***National Sun Yat-sen University, Kaohsiung, Tajvan
bozoki.sandor@sztaki.mta.hu, ronyai.lajos@sztaki.mta.hu

Kulcsszavak: diszkrét geometria, többváltozós polinomrendszer, gyöktesztek

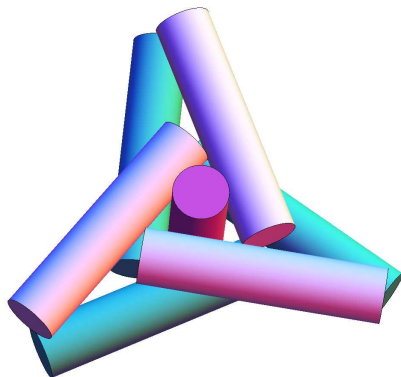
Kivonat – Littlewood több mint ötven évig nyitott diszkrét geometriai kérdését válaszoljuk meg: létezik a térben hét páronként érintkező, végtelen hosszú, azonos átmérőjű körhenger.

Abstract – One of Littlewood’s problems in discrete geometry, open for more than fifty years, is solved: in the 3-space there exist seven congruent, mutually touching infinite cylinders.

1. BEVEZETÉS

Dudeney száz évvel ezelőtt megjelent könyvében [9] szerepel az alábbi feladvány: helyezzünk el öt egyforma érmét úgy, hogy bármely kettő érintse egymást. Érme alatt olyan egyenes körhengert értünk, amely kellően lapos, azaz a magassága az átmérőjéhez képest nagyon kicsi. A hengerek magasságának – a továbbiakban hosszának – jelentős növelésével a páronként érintkező cigaretták problémájához jutunk, amelynek az általunk ismert legkorábbi előfordulási helye Grätzer József 1935-ös kiadású Rébusz című könyve [12]. Az itt szereplő feladatkiírásban hat cigarettáról van szó. Martin Gardner [11] matematikát népszerűsítő munkásságának köszönhetően kiderült [20], hogy nemcsak hat, hanem hét cigarettát is el

lehet rendezni úgy, hogy bármely kettő érintse egymást (1. ábra).



1. ábra Hét, páronként érintkező cigarettá (forrás: Kabai [15])

Nyitott kérdés, hogy el lehet-e nyolc (vagy több) egybevágó, véges hosszú hengert helyezni a páronként érintkező

feltételével. Ugyancsak tisztázatlan a válasz az érménél hosszabb, de a cigarettánál rövidebb hengerekre megfogalmazott hasonló kérdésekre. Az 1. ábrán a középső henger mindkét irányban, míg az összes többi henger az egyik irányban tetszőleges mértékben meghosszabbítható. Littlewood [19, 22] a 60-as évek elején fogalmazta meg az alábbi kérdést: *El lehet-e helyezni hét, végtelen hosszú, azonos átmérőjű hengert úgy, hogy bármely kettő érintkezzen?* A kérdés általánosabban: mennyi a páronként érintkező végtelen hosszú egybevágó hengerek maximális száma? Ez utóbbi máig megoldatlan. Hat végtelen henger egy lehetséges elrendezése megtalálható Brass, Moser és Pach könyvében [6]. Bezdek András bebizonyította, hogy 24-nél több végtelen henger nem lehet páronként érintkező [3]. Bezdek András és Ambrus Gergely pedig Kuperberg egy 8 hengeres elrendezéséről mutatta meg, hogy legalább egy hengerpár nem érintkezik. A tajvani Tsung-Lin Lee-vel közösen nemrég sikerült megmutatnunk, hogy Littlewood eredeti kérdésére a válasz igen [5], a továbbiakban ezt az eredményt foglaljuk össze.

2. A MODELL

A páronként érintkező, végtelen hosszú hengerek maximális száma megegyezik azon egyenesek maximális számával, amelyek páronként azonos pozitív távolságra vannak egymástól. Littlewood sejtésének ekvivalens átfogalmazása: létezik-e hét, egymástól azo-

nos pozitív távolságra lévő térbeli egyenes? Rögzítsük a hengerek sugarát 1-re, vagyis az egyenesek távolságát 2-re. A $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^3$ ponton áthaladó $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^3$ irányvektorú egyenes pontjainak paraméteres megadása:

$$\ell_i(s) = \mathbf{P}_i + s \mathbf{w}_i, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Ha ℓ_i és ℓ_j kitérő, akkor a távolságuk felírható

$$d(\ell_i, \ell_j) = \frac{|(\overrightarrow{\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j}) \cdot (\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j)|}{\|\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j\|}$$

alakban. Legyen $\mathbf{P}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $\mathbf{w}_i = (t_i, u_i, v_i)$. $d = 2$ -vel és a vegyszorzat determinánsos alakjával felírva adódik a következő egyenlet:

$$\det \begin{bmatrix} x_j - x_i & y_j - y_i & z_j - z_i \\ t_i & u_i & v_i \\ t_j & u_j & v_j \end{bmatrix}^2 - 4[(u_i v_j - v_i u_j)^2 + (v_i t_j - t_i v_j)^2 + (t_i u_j - u_i t_j)^2] = 0. \quad (1)$$

Az egyenlet bal oldalát kifejtve egy 12 változós, hatodfokú polinomot kapunk, amely 84 monom lineáris kombinációja.

A változók számának csökkentése céljából feltehetjük, hogy az ℓ_1 egyenes átmegegyezik a $\mathbf{P}_1(0, 0, -1)$ ponton és az irányvektora $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 0)$. Szintén rögzíthetjük az első két henger érintési pontját – vagyis az első két egyenes távolságát realizáló szakasz felezőpontját –, legyen ez az origó. Ebből adódik $\mathbf{P}_2(0, 0, 1)$, ℓ_2 irányát pedig már egyetlen változóval jellemezni tudjuk. Az első két egyenest eredetileg leíró 12 változó helyett elegendő 1.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az l_i ($i = 3, \dots, 7$) egyenesek egyike sem vízszintes, ezért metszik a $z = 0$ síkot: $z_i = 0$ ($i = 3, \dots, 7$).

Végül az egyenesek irányvektorának hosszára a $t_i + u_i + v_i = 1$ ($i = 3, \dots, 7$) feltétellel élünk. Ez ugyan kizárja a $t_i + u_i + v_i = 0$ egyenletet teljesítő irányvektorokat, de mivel nem az összes megoldást keressük, hanem legalább egy megoldást, ez a feltevés nem fog gondot okozni: látni fogjuk, hogy az ily módon szűkített keresési térben is találunk gyököt.

A redukció eredménye: $1 + 5 \times 4 = 21$ változónk és $5 + 5 + \binom{5}{2} = 20$ egyenletünk maradt.

Önkényesen hozzáadunk egy plusz feltételt: rögzítsük az első két egyenes (henger) szögét, legyenek egymásra mérőlegesek.

A kapott 20 változós, 20 polinom-egyenletből álló rendszerünk az alábbiak szerint csoportosítható. Az l_1 és l_j ($3 \leq j \leq 7$) egyenesek távolságából $y_j^2 t_j^2 + 2y_j^2 t_j u_j - 2y_j^2 t_j + y_j^2 u_j^2 - 2y_j^2 u_j + y_j^2 + 2y_j t_j u_j + 2y_j u_j^2 - 2y_j u_j - 4t_j^2 - 8t_j u_j + 8t_j - 7u_j^2 + 8u_j - 4 = 0$, míg az l_2 és l_j ($3 \leq j \leq 7$) egyenesek távolságából $x_j^2 t_j^2 + 2x_j^2 t_j u_j - 2x_j^2 t_j + x_j^2 u_j^2 - 2x_j^2 u_j + x_j^2 - 2x_j t_j u_j - 2x_j t_j^2 + 2x_j t_j - 4u_j^2 - 8t_j u_j + 8t_j - 7t_j^2 + 8u_j - 4 = 0$, végül az l_i és l_j ($3 \leq i < j \leq 7$) egyenesek távolságából $-4x_i y_i t_i u_i t_j u_j + 4x_i x_j t_i u_i t_j u_j + 4x_i y_j t_i u_i t_j u_j + 4y_i x_j t_i u_i t_j u_j - 4x_j y_j t_i u_i t_j u_j - 2y_i^2 t_i u_i t_j u_j - 2y_j^2 t_i u_i t_j u_j - 4x_i x_j t_i u_i u_j + 4x_i x_j u_i t_j u_j + 4x_i y_j t_i^2 u_j$

$$\begin{aligned}
 & -4y_i y_j t_i u_i t_j - 4y_i y_j t_i t_j u_j + 4y_i y_j u_i t_j^2 \\
 & + 4x_i x_j u_i u_j + 4y_i y_j t_i t_j + x_i^2 t_i^2 u_j^2 \\
 & + x_i^2 u_i^2 t_j^2 + y_i^2 t_i^2 u_j^2 + y_i^2 u_i^2 t_j^2 + x_j^2 t_i^2 u_j^2 \\
 & + x_j^2 u_i^2 t_j^2 + y_j^2 t_i^2 u_j^2 + y_j^2 u_i^2 t_j^2 + 2x_i y_i t_i^2 u_j^2 \\
 & + 2x_i y_i u_i^2 t_j^2 - 2x_i x_j t_i^2 u_j^2 - 2x_i x_j u_i^2 t_j^2 \\
 & - 2x_i y_j t_i^2 u_j^2 - 2x_i y_j u_i^2 t_j^2 - 2y_i x_j t_i^2 u_j^2 \\
 & - 2y_i x_j u_i^2 t_j^2 - 2y_i y_j t_i^2 u_j^2 - 2y_i y_j u_i^2 t_j^2 \\
 & + 2x_j y_j t_i^2 u_j^2 + 2x_j y_j u_i^2 t_j^2 - 2x_i y_i t_i^2 u_j \\
 & - 2x_i y_i t_i u_j^2 + 2x_i y_j t_i^2 u_j + 2x_i y_j t_i u_j^2 \\
 & + 2x_i y_j u_i^2 t_j + 2x_i y_j u_i t_j^2 - 2x_i y_i u_i^2 t_j \\
 & - 2x_i y_i u_i t_j^2 + 2y_i x_j t_i^2 u_j + 2y_i x_j t_i u_j^2 \\
 & + 2y_i x_j u_i^2 t_j + 2y_i x_j u_i t_j^2 - 2x_j y_j t_i^2 u_j \\
 & - 2x_j y_j t_i u_j^2 - 2x_j y_j u_i^2 t_j - 2x_j y_j u_i t_j^2 \\
 & - 2x_i^2 t_i u_j^2 - 2x_i^2 u_i^2 t_j - 2y_i^2 t_i^2 u_j - 2y_i^2 u_i^2 t_j \\
 & - 2x_j^2 t_i u_j^2 - 2x_j^2 u_i^2 t_j - 2y_j^2 t_i^2 u_j \\
 & - 2y_j^2 u_i^2 t_j + 2x_i^2 t_i u_i u_j + 2x_i^2 u_i t_j u_j \\
 & + 2y_i^2 t_i u_i t_j + 2y_i^2 t_i t_j u_j + 2x_i^2 t_i u_i u_j \\
 & + 2x_i^2 u_i t_j u_j + 2y_j^2 t_i u_i t_j + 2y_j^2 t_i t_j u_j \\
 & + 2x_i y_i t_i u_i t_j + 2x_i y_i t_i u_i u_j + 2x_i y_i t_i t_j u_j \\
 & + 2x_i y_i u_i t_j u_j - 2x_i y_j t_i u_i t_j \\
 & - 2x_i y_j t_i u_i u_j - 2x_i y_j t_i t_j u_j \\
 & - 2x_i y_j u_i t_j u_j - 2y_i x_j t_i u_i t_j \\
 & - 2y_i x_j t_i u_i u_j - 2y_i x_j t_i t_j u_j \\
 & - 2y_i x_j u_i t_j u_j + 2x_j y_j t_i u_i t_j \\
 & + 2x_j y_j t_i u_i u_j + 2x_j y_j t_i t_j u_j \\
 & + 2x_j y_j u_i t_j u_j - 2x_i^2 u_i u_j - 2y_i^2 t_i t_j \\
 & - 2x_j^2 u_i u_j - 2y_j^2 t_i t_j - 2x_i y_i t_i u_i \\
 & + 2x_i y_i u_i t_j - 2x_i y_i t_j u_j \\
 & + 2x_i y_j t_i u_i - 2x_i y_j t_i u_j - 2x_i y_j u_i t_j \\
 & + 2x_i y_j t_j u_j + 2y_i x_j t_i u_i - 2y_i x_j t_i u_j \\
 & - 2y_i x_j u_i t_j + 2y_i x_j t_j u_j - 2x_j y_j t_i u_i \\
 & + 2x_j y_j t_i u_j + 2x_j y_j u_i t_j - 2x_j y_j t_j u_j \\
 & - 2x_i x_j u_i^2 - 2x_i x_j u_j^2 - 2y_i y_j t_j^2 - 2y_i y_j t_i^2 \\
 & + 24t_i u_i t_j u_j + x_i^2 u_i^2 + x_i^2 u_j^2 + y_i^2 t_i^2 + y_j^2 t_j^2 \\
 & + x_j^2 u_i^2 + x_j^2 u_j^2 + y_j^2 t_i^2 + y_j^2 t_j^2 - 12t_i^2 u_j^2 \\
 & - 12u_i^2 t_j^2 - 4t_i^2 - 4u_i^2 - 4t_j^2 - 4u_j^2 \\
 & - 8t_i u_i t_j - 8t_i u_i u_j - 8t_i t_j u_j + 8t_i u_j^2 \\
 & + 8t_i^2 u_j + 8u_i^2 t_j + 8u_i t_j^2 - 8u_i t_j u_j + 8t_i t_j \\
 & + 8u_i u_j = 0 \text{ adódik.}
 \end{aligned}$$

A fenti polinomok – legalábbis a harmadik típus – bonyolultak, de a következő megfontolás szerint messze nem annyira, amennyire lehetnének. Az (1) egyenletről származó polinomról megállapítottuk, hogy 12 változós, a foka 6 és 84 tagja van. Ezek a látszólag száraz adatok egy igen hasznos körülményt mutatnak: a polinom igen ritka. Egy „tipikus” 12 változós hatodfokú polinomnak $\binom{18}{6} = 18564$ tagja van. Ez az erős ritkaság szerencsére megmaradt a v_i és a z_i változók kiküszöbölése után is (137 tag a lehetséges $\binom{14}{8} = 3003$ helyett). A kapott egyenletrendszer ritkaságát a következő részben ismertetett megoldó módszer jól ki tudja aknázni.

3. A TÖBBVÁLTOZÓS POLINOMRENDSZER MEGOLDÁSA

A többváltozós polinomrendszerek a nemlineáris egyenletrendszereken belül egy általában nehezen megoldható családot alkotnak. Néhány változó esetén még működik a Gröbner-bázisok módszere, a rezultáns módszer vagy annak általánosításai. A Newton-iteráció is alkalmazható, azon erős feltevés mellett, hogy van egy jó közelítésünk a keresett megoldásra és egy még pontosabb közelítést keresünk. Ha a polinomrendszerben a változók – és az egyenletek – száma lényegesen több mint 2-5, továbbá nem feltétlenül csak egy, hanem akár az összes gyököt keressük és nem is állnak rendelkezésre közelítő értékek, emellett még a rendszer ritkaságát is szeretnénk kihasználni, akkor jelenlegi ismereteink és tapasztalataink szerint a homotópiás módszer

az utolsó reménysugár. A homotópiás módszernek itt mindössze az alapötletét vázoljuk: a megoldandó $P(\mathbf{x})$ polinomrendszerhez társítunk egy alkalmas, ugyanannyi változóból álló olyan $Q(\mathbf{x})$ polinomrendszert, amelynek az összes gyökét ismerjük. A két polinomrendszer parametrikus ($0 \leq t \leq 1$) konvex kombinációját képezve, a

$$H(\mathbf{x}, t) = (1 - t)Q(\mathbf{x}) + tP(\mathbf{x}) = 0$$

polinomrendszer megoldásait keressük. A $t = 0$ -ból indulva a gyököket ismerjük, majd t értékét lassan növelve, és az előző lépésben kapott gyököket egy-egy Newton-iteráció kezdőpontjaként felhasználva, a $t = 1$ végpontban megkapjuk a $P(\mathbf{x})$ polinomrendszer gyökeit. A homotópiás módszer részleteit illetően Chen, Lee és Li [7] Drexler [8], Garcia és Zangwill [10], Huber és Sturmfels [14], Lee, Li és Tsai [17], Li [18], Morgan és Sommese [21] dolgozatait ajánljuk.

Az előző fejezetben felírt polinomrendszerünkhöz tartozó homotópiás rendszernek 121 milliárd megoldásjelöltje van, ezeket egyenként meg kell vizsgálni és kiválogatni a valós közelítő megoldásokat. Tsung-Lin Lee társ-szerzőnk 12 magos Intel Xeon X5650 2.66 GHz számítógépe havonta 20 millió gyökjelöltet tudott megvizsgálni. A teljes elemzés így – változatlan hardver és szoftverrel – 6050 hónapot, azaz bő 500 évet igényelt volna. Mi azonban megelégedtünk egy-két valós megoldással is. Az elsőt 3 hónap után kaptuk meg, a másodikat pedig egy hónappal később.

4. A GYÖKÖK ELLENŐRZÉSE

Szilassi Lajos [30] több példát is felsorol arra, hogy a lebegőpontos számításokkal kapott 10, 20 vagy akár még több tizedesjegynyi pontosság nem szűr ki minden hamis gyököt. Meg kell tehát vizsgálni, hogy nemcsak egy jó közelítő megoldást kaptunk, hanem a polinomrendszernek valóban létezik izolált valós gyöke a kapott érték kis sugarú környezetében. Két gyöktesztelő algoritmust alkalmaztunk, a Smale α -elméletén [28] alapuló **alphaCertified** módszert [13], valamint Krawczyk intervallumos módszerét [16, 26]. Mindkét eljárás igazolta, hogy a kapott két megoldás „valódi”, ezzel beláttuk Littlewood sejtését.

Tétel [5]: A páronként érintkező, végtelen hosszú, azonos sugarú hengerek maximális száma legalább 7.



2. ábra Hét, páronként érintkező végtelen henger [5]

Megjegyezzük, hogy ha a fenti modellt 8 hengerrel írjuk fel, akkor egy 25

változós, 27 egyenletből álló polinomrendszer kapunk. Pusztán abból, hogy az egyenletek száma nagyobb, mint a változók száma, azaz az egyenletrendszer túlhatározott, még nem feltétlenül következik, hogy nincs megoldása. Mindenesetre ha valamilyen módon sikerülne igazolni az egyenletek „függetlenségét”, precízebben azt, hogy ezen polinomok által generált ideálban benne van az 1 polinom, akkor abból az is következne, hogy a páronként érintkező, végtelen hosszú, azonos sugarú hengerek maximális száma 7. Jelenleg azonban a legjobb ismert felső korlát 24 [3], a legjobb ismert alsó korlát pedig az imént bizonyított 7.

Ahogy korábban rámutattunk, a munkánkban lényegesen használtuk Hauenstein és Sottile **alphaCertified** programját [13], ami egyebek közt (pontos) valós megoldás létezésére ad tanúsítványt. Munkánk motivációjául szolgált a tanúsítványt kereső algoritmus továbbfejlesztéséhez, amely túlhatározott egyenletrendszerek esetén is működik [1], [29].

5. AUXETIKUS TÉRRÁCSOK

Szeretnénk megemlíteni a páronként érintkező hengerek egy érdekes fizikai alkalmazását. Az auxetikus (vagy másként mondva negatív Poisson-tényezőjű) anyagok jellemzője, hogy ha nyújtjuk őket egy irányban, akkor tágulást mutatnak valamely erre merőleges irányban is. A szokatlan tulajdonság miatt antiguminak is mondják őket (a gumiról jól ismert,

hogy ha nyújtjuk egy irányban, akkor zsugorodik a merőleges irányokban). Auxetikus összetevőt, PTFE polimert tartalmaznak például a Gore-Tex ruházati anyagok.

Peter Pikhitsa fizikus és szerzőtársai [23, 25, 24] szálakból (hosszú körhengerből) álló auxetikus tulajdonságú szerkezeteket vizsgáltak. Ezek építőköz jellegű alapegységei N páronként érintkező hengerből álló szerkezetek. Az alapegységek alkalmas, rácsszerű ismétlődéseket mutató összeépítésével alakul ki az auxetikus tulajdonságú szerkezet. Példáikban az N értéke 6, 7, 8 vagy 9, a hengerek sugara viszont nem feltétlenül azonos. Megállapításaikat elvi modellek segítségével igazolták.

6. EGY TOVÁBBI NYITOTT KÉRDÉS

A 2. fejezetben felépített modellben önkényesen hozzáadott feltétel – két henger merőlegessége – elhagyásával újra egy 21 változós, 20 egyenletes polinomrendszert kapunk. Természetesen adódik a sejtés, hogy ennek végtelen sok megoldása lehet, egy szabadsági fokkal. Meg tudjuk mutatni, hogy ennek végtelen sok valós megoldása van. Az újabb számításaink, melyek a Karl Scherer által készített animációban [27] is láthatók, azt sugallják, hogy a megoldáshalmaz tartalmaz „hosszú görbét”. Az egzakt bizonyításhoz azonban még további lépések szükségesek, az eddig használt eszköztár csak pontonkénti vizsgálatra alkalmas. A 3. ábrán egy olyan hengerhetes szerepel, amely a lehető legkisebb helyet foglalja el abban az értelemben,

hogy az ugyanazon hengeren lévő érintési pontok maximális távolsága a legkisebb.



3. ábra Hét, páronként érintkező végtelen henger fapálcikákkal

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A szerzők megköszönik Kabai Sándor hozzájárulását az általa készített Wolfram Mathematica demonstrációból [15] készült 1. ábra felhasználásához.

Katona Jánost (Szent István Egyetem, Ybl Miklós Építéstudományi Kar, Építőmérnöki Intézet, Matematika és Informatikai Szakcsoport) kétszeresen is köszönet illeti: egyrészt a 3. ábrán szereplő fapálcikás változat plexigyűrűjéhez felhasznált fűrészablom CAD rajzáért. Másrészt pedig tőle tudjuk, hogy a páronként érintkező cigaretták problémája az általunk addig legrégebbinek ismert Gardner-cikknél [11] 24 évvel korábban megjelent Grätzer József könyvében [12].

A szerzők köszönik Gál Péter fotóit (2. és 3. ábra).

Bozóki Sándor köszöni az MTA Bolyai János Kutatási Ösztöndíj (BO/00154/16) és az OTKA K 111797, Rónyai Lajos pedig az OTKA K 115288 támogatását.

IRODALOM

- [1] T.A. Akoglu, J.D. Hauenstein, and Á. Szántó, „Certifying solutions to overdetermined and singular polynomial systems over Q ,” *Journal of Symbolic Computation*, in press, 2017.
- [2] G. Ambrus, and A. Bezdek, „On the number of mutually touching cylinders. Is it 8?,” *European Journal of Combinatorics* vol. 29(8), pp. 1803–1807, 2008.
- [3] A. Bezdek, „On the number of mutually touching cylinders,” *Combinatorial and Computational Geometry, MSRI Publication*, vol. 52, pp. 121–127, 2005.
- [4] L. Blum, F. Cucker, M. Shub, and S. Smale, *Complexity and real computation*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [5] S. Bozóki, T.L. Lee, L. Rónyai, „Seven mutually touching infinite cylinders,” *Computational Geometry: Theory and Applications*, vol. 48(2), pp. 87–93, 2015.
- [6] P. Brass, W. Moser, and J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer, 2005.
- [7] T. Chen, T.L. Lee, and T.Y. Li, „Mixed volume computation in parallel,” *Taiwanese Journal of Mathematics*, vol. 18(1), pp. 93–114, 2014.
- [8] F.J. Drexler, „Eine Methode zur Berechnung sämtlicher Lösungen von Polynomgleichungssystemen,” *Numerische Mathematik* vol. 29(1), pp. 45–58, 1977.
- [9] H.E. Dudeney, *Amusements in mathematics*, Thomas Nelson and Sons, London, Edingburgh, New York, 1917, p. 143., p. 248.
- [10] C.B. Garcia, and W.I. Zangwill, „Finding all solutions to polynomial systems and other systems of equations,” *Mathematical Programming* vol. 16(1), pp. 159–176, 1979.
- [11] M. Gardner, *The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*, Simon and Schuster, New York, pp. 110–115, 1959.
- [12] J. Grätzer, *Rébusz*, Singer és Wolfner Irodalmi Intézet, Budapest, 1935, 115. o., 233. o.
- [13] J.D. Hauenstein, and F. Sottile, „Algorithm 921: alphaCertified: certifying solutions to polynomial systems,” *ACM Transactions on Mathematical Software* vol. 38(4), Article 28, 2012. DOI 10.1145/2331130.2331136
- [14] B. Huber, and B. Sturmfels, „A polyhedral method for solving sparse polynomial systems,” *Mathematics of Computation* vol. 64(212), pp. 1541–1555, 1995.
- [15] S. Kabai, „Seven Cylinders,” *Wolfram Demonstrations Project*, 2008 <http://demonstrations.wolfram.com/SevenCylinders>
- [16] R. Krawczyk, „Newton-Algorithmen zur Bestimmung von Nullstellen mit Fehlerschranken,” *Computing* vol. 4(3), pp. 187–201, 1969.
- [17] T.L. Lee, T.Y. Li, and C.H. Tsai, „HOM4PS-2.0, A software package for solving polynomial systems by the polyhedral homotopy continuation method,” *Computing* vol. 83(2-3), pp. 109–133, 2008.
- [18] T.Y. Li, „Numerical solution of multivariate polynomial systems by homotopy continuation methods,” *Acta Numerica* vol. 6, pp. 399–436, 1997.
- [19] J.E. Littlewood, *Some problems in real and complex analysis*, Heath Mathematical Monographs, Raytheon Education, Lexington, Massachusetts, 1968.

- [20] L. Mérő, *Észjárások – A racionális gondolkodás korlátai és a mesterséges intelligencia*, Tericum Kiadó, 1997, R8 rejtvény, 17–18. o., 183–184. o.
- [21] A. Morgan, A. Sommese, „Computing all solutions to polynomial systems using homotopy continuation,” *Applied Mathematics and Computation* vol. 24(2) pp. 115–138, 1987.
- [22] C.S. Ogilvy, *Tomorrow’s math: unsolved problems for the amateur*, Oxford University Press, New York, 1962.
- [23] P.V. Pikhitsa, „Regular network of contacting cylinders with implications for materials with negative Poisson ratios,” *Physical Review Letters* vol. 93(1), Article 015505, 2004.
- [24] P.V. Pikhitsa, M. Choi, H.-J. Kim, and S.-H. Ahn, „Auxetic lattice of multipods,” *Physica Status Solidi B* vol. 246(9), pp. 2098–2101, 2009.
- [25] P.V. Pikhitsa, M. Choi, „Seven, eight, and nine mutually touching infinitely long straight round cylinders: Entanglement in Euclidean space,” manuscript, arXiv:1312.6207, 2014.
- [26] S.M. Rump, „INTLAB – INTerval Laboratory,” in: Csendes, T., editor, *Developments in reliable computing*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 77–104, 1999.
- [27] K. Scherer „Seven Touching Cylinders Puzzle,” *Wolfram Demonstrations Project*, 2014.
<http://demonstrations.wolfram.com/SevenTouchingCylindersPuzzle>
- [28] S. Smale, „Newton’s method estimates from data at one point,” in Ewing, R.E., Gross, K.I., Martin, C.F. (editors): *The merging of disciplines: new directions in pure, applied, and computational mathematics*, Springer, New York, pp. 185–196, 1986.
- [29] Á. Szántó, „Certification of Approximate Roots of Exact Polynomial Systems,” *Notices of the AMS*, vol. 63, pp. 1160–1162, 2016.
- [30] L. Szilassi, „A kételkedés joga – és kötelessége,” Szegedi Tudományegyetem, Juhász Gyula Tanárképző Főiskolai Kar, Matematika Tanszék
<http://www.model.u-szeged.hu/cd/content/szilassi/Euler3d-kurzus/04%20%20A%20kocka%20feldarabol%25a0sa/A%20k%20B4-%20C1elked%20-%20joga.pdf>