

Homográfia becslése részleges ismert affin transzformációból

Baráth Dániel és Hajder Levente

MTA SZTAKI, Elosztott Események Elemzése Kutatólaboratórium

Abstract

A dolgozat célja egy olyan új szerű homográfia becslő eljárás bevezetése, mely input adatként a pont koordinátákon felül nem a teljes affin transzformációt, hanem annak csak néhány komponensét várja. A bemutatott módszer a HAF algoritmus kiterjesztése. (A HAF a "Homográfia becslése Affin transzformáció Fundamentális mátrix felhasználásával" rövidítése.) Ezen keresztül azt is bemutatjuk, hogy kizárólag pont-koordinátákat használó módszerek hiányosak, hiszen a legtöbb jellemző-pont detektor a pontok elhelyezkedésén kívül bizonyos affin komponenseket is szolgáltat, mint például elforgatást vagy tengelyek menti skálát. A bemutatott módszert P-HAF-nak nevezzük a későbbiekben. A módszer szintetikus és valós teszteken is validáltuk.

1. BEVEZETÉS

A homográfia-becslés a számítógépes látás több területén is alapvető fontosságú eljárás, mint például a robot látás^{1,2}, kamera-kalibráció^{3,4,5}, háromdimenziós rekonstrukció^{6,7} vagy akár a kiterjesztett valóság⁸. Természetesen a területen több különböző, más és más bemenetet használó módszer is elérhető: akadnak pont-⁹, egyenes-⁹, vagy régió-megfeleltetéseket¹⁰ használóak, de éppúgy kontúr-alapú¹¹ módszerek is. Ezek az általánosan használt eljárások adat-normalizációt⁹ és numerikus optimalizálást is igényelnek.

Annak ellenére, hogy a pont-megfeleltetéseket használó homográfia-becslés általánosan már megoldott problémának tekintett, előző munkánkban¹² bemutattuk, hogy ezek a módszerek hiányosak. A jellemző-pont detektorok által szolgáltatott információból csak és kizárólag a pontok elhelyezkedését figyelembe venni azt eredményezi, hogy elveszítünk lényeges információkat, melyek pontosíthatnák a becslési eljárást. Előző cikkünkben bemutattuk, hogyan lehet a teljes pontbéli affin transzformáció ismeretében a vonatkozó homográfiát megbecsülni. Ez elméleti szempontból lényeges, azonban a gyakorlatban nehezen alkalmazható, hiszen a teljes affin transzformáció becslése nehéz feladat.

Ezen értekezés elsődleges célja egy olyan általános elméleti háttér megalkotása, amely lehetőséget biztosít a különböző affin komponensek ismeretében a becslést javítani, az elméletet egy a gyakorlatban könnyen alkalmazható formába önteni.

A munka eredménye két részből áll: **(1)** Sikerült kiter-

jesztenünk a HAF algoritmust¹² részlegesen ismert affin transzformációkra és **(2)** beláttuk, hogy ezen az új szerű leírás segítségével a homográfia már két pontmegfeleltetés segítségével megbecsülhető. Tudomásunk szerint ehhez eddig legkevesebb három pontmegfeleltetés kellett.

A cikk felépítése a következő: először az elméleti háttérrel ismertetjük, majd annak általánosítását különböző affin komponensekre. Ez után megmutatjuk, hogyan alkalmazható az elmélet SIFT pontokra. Legvégül, szintetikus és valós tesztekkel mutatjuk be a módszer hatékonyságát.

1.1. ELMÉLETI HÁTTÉR

Homográfia. A dolgozatban a homográfia általánosan elfogadott definícióját használjuk, miszerint a H homográfia egy $P^2 \rightarrow P^2$ leképezés, amely minden egyes $x_i^1 = [u_i^1 \ v_i^1]^T$ ponthoz a megfelelő $x_i^2 = [u_i^2 \ v_i^2]^T$ és $[u_i^2 \ v_i^2 \ 1]^T \sim H[u_i^1 \ v_i^1 \ 1]^T$ pontot rendel. Itt a felső és alsó indexek az adott képet és az aktuális pontot jelölik.

Homográfia kifejezése a fundamentális mátrix segítségével. Az $\begin{bmatrix} e^2 \\ \times \end{bmatrix} H = F$ formula⁹ segítségével a probléma szabadságfoka háromra csökkenthető, ahogy az részleteiben látható korábbi cikkünkben¹². Ekkor a homográfia kifejezhető az utolsó sorának elemeivel (h_{31} , h_{32} és h_{33}) az alábbi módon:

$$h_{1j} = e_x h_{3j} + f_{2j} \quad h_{2j} = e_y h_{3j} + f_{1j} \quad j \in \{1, 2\} \quad (1)$$

Ha az 1. egyenletet behelyettesítjük a hagyományos DLT

eljárásba ($p^2 \sim Hp^1$), akkor a teljes homográfia a következő egyenletekkel számolható:

$$\begin{aligned} (u^1 e_x - u^1 u^2)h_{31} + (v^1 e_x - v^1 u^2)h_{32} + \\ (e_x - u^2)h_{33} &= -u^1 f_{21} - v^1 f_{22} - f_{23}. \quad (2) \\ (u^1 e_y - u^1 v^2)h_{31} + (v^1 e_y - v^1 v^2)h_{32} + \\ (e_y - v^2)h_{33} &= u^1 f_{11} + v^1 f_{12} + f_{13}. \end{aligned}$$

Meg kell jegyezni, hogy ekkor egy pontpár csak egyetlen egyenletet jelent, hiszen a fundamentális mátrix a pontmegfeleltetési probléma szabadságfokát is lecsökkenti a kapcsolódó epipoláris egyenesen való keresésre. Ez a fenti módszer a későbbiekben 3PT néven fog szerepelni, hiszen már 3 pontmegfeleltetés (és a fundamentális mátrix) segítségével számolható.

Affin transzformáció. Molnár és tsai.¹³ megmutatták, hogyan számolható ki az A affin transzformáció a H homográfia paramétereiből. Az affin transzformáció négy paramétere az elforgatásért, a vízszintes és függőleges skáláért és a nyírásért felelős. Az A utolsó oszlopa pedig a eltolást írja le. Ekkor a megfeleltetés a pont-koordináták között az első (u^1 and v^1), illetve a második (u^2 and v^2) képen a következőképp adódik:

$$u^2 = \frac{h_1^T [u^1, v^1, 1]^T}{h_3^T [u^1, v^1, 1]^T} \quad v^2 = \frac{h_2^T [u^1, v^1, 1]^T}{h_3^T [u^1, v^1, 1]^T}$$

ahol a 3×3 -as H homográfia mátrix az alábbi formában is leírható: $H = [h_1^T \ h_2^T \ h_3^T]^T$. Az affin paraméterek ekkor a perspektív transzformáció pontbeli parciális deriváltjaiként adódnak:

$$a_{1j} = \frac{h_{1j} - h_{3j}u^2}{s} \quad a_{2j} = \frac{h_{2j} - h_{3j}v^2}{s} \quad j \in \{1, 2\}, \quad (3)$$

ahol $s = h_3^T [u^1, v^1, 1]^T$. Részletes levezetés korábbi cikkünkben olvasható¹².

2. HOMOGRÁFIA BECSLÉSE AFFIN TRANSZFORMÁCIÓBÓL

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy hogyan válik egyszerűbbé a homográfia mátrix becslése az epipoláris geometria és a pontbeli affin transzformációk ismeretében.

2.1. HOMOGRÁFIA AFFIN TRANSZFORMÁCIÓBÓL

Ahogy azt a HAF eljárás¹² esetén megmutattuk, a homográfia kiszámolható egy inhomogén, lineáris egyenletrendszer megoldásával, amennyiben az epipoláris geometria ismert a sztereo képpár között. A C együttható mátrix felírható az

alábbi módon:

$$C = \begin{bmatrix} a_{i,11}u_i^1 + u_i^2 - e_x & a_{i,11}v_i^1 & a_{i,11} \\ a_{i,12}v_i^1 + u_i^2 - e_x & a_{i,12}u_i^1 & a_{i,12} \\ a_{i,21}u_i^1 + v_i^2 - e_y & a_{i,21}v_i^1 & a_{i,21} \\ a_{i,22}v_i^1 + v_i^2 - e_y & a_{i,22}u_i^1 & a_{i,22} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Ekkor ez az egyenletrendszer $Cy = d$ formára hozható, ahol a $d = [f_{21}, f_{22}, -f_{11}, -f_{12}]$ vektor az inhomogén részt, míg a $y = [h_{31}, h_{32}, h_{33}]^T$ vektor pedig az ismeretlen paramétereket foglalják magukba. A legkisebb négyzetes értelemben optimális megoldás megadható az $y = C^\dagger d$ egyenlettel, ahol a C^\dagger a C mátrix Moore-Penrose pszeudo-inverze.

2.2. AZ AFFIN TRANSZFORMÁCIÓS MODEL

Jelöljük a i . indexű ($i \in [1, n]$) pontpárt az eltolásért felelős utolsó oszlop nélkül a következőképpen:

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{i,11} & a_{i,12} \\ a_{i,21} & a_{i,22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_{i,x} & w_i \\ 0 & s_{i,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{i,x} \cos(\alpha_i) & w_i \cos(\alpha_i) - s_{i,y} \sin(\alpha_i) \\ s_{i,x} \sin(\alpha_i) & w_i \sin(\alpha_i) + s_{i,y} \cos(\alpha_i) \end{bmatrix} \quad (5)$$

A α_i , $s_{i,x}$, $s_{i,y}$ és a w_i változók az elforgatási szöveget, az x , y tengelyekre vonatkozó skálát és a nyírási paramétert jelentik.

2.3. HOMOGRÁFIA RÉSZLEGESEN ISMERT AFFIN TRANSZFORMÁCIÓBÓL

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy nincs szükség a teljes affin transzformációra a kapcsolódó homográfia kiszámításához. Ez gyakorlati szempontból hasznos, hiszen a legtöbb jellemző-pont detektor az affin transzformáció csak egy bizonyos részzeit szolgáltatja. A SIFT detektor például egy elforgatást és egy skálát eredményez, míg a nyírás ismeretlen marad.

Helyettesítsük be az előző fejezetben ismertett transzformációs modellt (5. egyenlet) a 4. egyenletekbe:

$$h_{31} (s_{i,x} \cos(\alpha_i) u_i^1 + u_i^2 - e_x) + h_{32} s_{i,x} \cos(\alpha_i) v_i^1 + h_{33} s_{i,x} \cos(\alpha_i) = f_{21} \quad (6)$$

$$h_{32} ((w_i \cos(\alpha_i) - s_{i,y} \sin(\alpha_i)) v_i^1 + u_i^2 - e_x) + h_{31} (w_i \cos(\alpha_i) - s_{i,y} \sin(\alpha_i)) u_i^1 + h_{33} (w_i \cos(\alpha_i) - s_{i,y} \sin(\alpha_i)) = f_{22} \quad (7)$$

$$h_{31} (s_{i,x} \sin(\alpha_i) u_i^1 + v_i^2 - e_y) + h_{32} s_{i,x} \sin(\alpha_i) v_i^1 + h_{33} s_{i,x} \sin(\alpha_i) = -f_{11} \quad (8)$$

$$h_{32} ((w_i \sin(\alpha_i) + s_{i,y} \cos(\alpha_i)) v_i^1 + v_i^2 - e_y) + h_{31} (w_i \sin(\alpha_i) + s_{i,y} \cos(\alpha_i)) u_i^1 + h_{33} (w_i \sin(\alpha_i) + s_{i,y} \cos(\alpha_i)) = -f_{12} \quad (9)$$

Ekkor n pontra megadható egy túlhatározott, inhomogén, lineáris egyenletrendszer, mely legkisebb négyzetes értelemben véve optimálisan megoldható.

2.4. NORMALIZÁCIÓ

Ahogy az jól ismert, a felhasznált adatok normalizációja a homográfia-becslés lényeges része ⁹, amit a numerikus pontatlanságból következő hibák kiküszöbölésért alkalmazunk. Jelöljük az első és a második képekre vonatkozó normalizációs transzformációkat rendre T_1 -vel és T_2 -vel, ahol a normalizált homográfia az alábbi módon számolható: $H' = T_2 H T_1^{-1}$. A T_1, T_2 . A transzformációs mátrixok speciális affin transzformációk: kizárólag eltolást és skálát tartalmaznak. Jelöljük ezentúl a horizontális és a vertikális skálákat l_x^k -vel és l_y^k -vel ($k \in \{1, 2\}$).

A pontkoordináták és a fundamentális mátrix normalizációja. Az első és második képen a normalizált pontok koordinátái a következő formulával számolhatóak: $p_i^{1'} = T_1 p_i^1$ és $p_i^{2'} = T_2 p_i^2$. A fundamentális mátrixra vonatkozó normalizációs formula az alábbi formában adható meg:

$$F' = T_2^{-T} F T_1^{-1}. \quad (10)$$

Az affin transzformáció normalizációja. Ahogy az előző cikkünkben ¹² beláttuk, a normalizációs transzformáció módosítja az megoldás eredeti egyenleteit (3.) Például,

$$\left(h_{31} u_i^1 + h_{32} v_i^1 + h_{33} \right) a'_{i,11} = \frac{l_x^2}{l_x^1} h_{11} - \frac{l_x^2}{l_x^1} u_i^2 h_{31}, \quad (11)$$

ahol a $l_x^k = T_{k,11}$, $l_y^k = T_{k,22}$ ($k \in \{1, 2\}$) paraméterek a horizontális és vertikális skálát jelölik. Az egyenlet bal oldala a projektív mélység és az aktuális affin paraméter szorzataként adódik a normalizált térben. Elemi átalakítások után belátható, hogy az affin paraméterek a következőképp számolhatóak: $a'_{i,11} = \left(l_x^2 / l_x^1 \right) a_{i,11}$, $a'_{i,12} = \left(l_x^2 / l_y^1 \right) a_{i,12}$, $a'_{i,21} = \left(l_y^2 / l_x^1 \right) a_{i,21}$, $a'_{i,22} = \left(l_y^2 / l_y^1 \right) a_{i,22}$. Az normalizált affin paraméterek a következőképp módosítják a 6–9 egyenleteket

$$h_{31} \left(s_{i,x} \left(l_x^2 / l_x^1 \right) \cos(\alpha_i) u_i^1 + u_i^2 - e_x \right) + \left(l_x^2 / l_x^1 \right) \left(h_{32} s_{i,x} \cos(\alpha_i) v_i^1 + h_{33} s_{i,x} \cos(\alpha_i) \right) = f_{21} \quad (12)$$

$$h_{32} \left((w_i \cos(\alpha_i) - s_{i,y} \sin(\alpha_i)) \left(l_x^2 / l_y^1 \right) v_i^1 + u_i^2 - e_x \right) + \left(l_x^2 / l_y^1 \right) h_{31} (w_i \cos(\alpha_i) - s_{i,y} \sin(\alpha_i)) u_i^1 + \left(l_x^2 / l_y^1 \right) h_{33} (w_i \cos(\alpha_i) - s_{i,y} \sin(\alpha_i)) = f_{22} \quad (13)$$

$$\left(l_y^2 / l_x^1 \right) h_{31} \left(s_{i,x} \sin(\alpha_i) u_i^1 + v_i^2 - e_y \right) + \left(l_y^2 / l_x^1 \right) \left(h_{32} s_{i,x} \sin(\alpha_i) v_i^1 + h_{33} s_{i,x} \sin(\alpha_i) \right) = -f_{11} \quad (14)$$

$$\left(l_y^2 / l_y^1 \right) h_{32} \left((w_i \sin(\alpha_i) + s_{i,y} \cos(\alpha_i)) v_i^1 + v_i^2 - e_y \right) + \left(l_y^2 / l_y^1 \right) h_{31} (w_i \sin(\alpha_i) + s_{i,y} \cos(\alpha_i)) u_i^1 + \left(l_y^2 / l_y^1 \right) h_{33} (w_i \sin(\alpha_i) + s_{i,y} \cos(\alpha_i)) = -f_{12} \quad (15)$$

Amennyiben ehhez a rendszerhez hozzávesszük a 3PT mód-

szernél ismertetettek (2.) egy inhomogén, lineáris egyenletrendszert kapunk. Megjegyezzük, hogy itt a normalizált koordinátákat és fundamentális mátrixot kell behelyettesíteni.

Ez a normalizációs formula letisztultabb a ¹²-ban bemutattnál.

2.5. HOMOGRÁFIA BECSLÉSE SIFT JELLEGZETES-PONTOKBÓL

A fentiekben ismertett becslési eljárás alkalmazható különböző jellegzetes pont-leírókra. Mi a következőkben a széles körben használt SIFT ¹⁴ leírókat használtuk valós tesztekre. Ez a leíró egy skálát és egy elforgatási szöveget ad a megfigyelt pontokra vonatkozóan. Mi a skálát horizontális irányúnak tekintettük, ezért a 6–9 rendszerből csak azokat az egyenleteket kell megtartani, melyek tartalmazzák az s_x és az α paramétert (6, 8 egyenletek). Ekkor pontpáronként három egyenlet adott. Annak ellenére, hogy ez elegendőnek látszik már egyetlen pont esetén is, azonban a homográfia három paraméterének kiszámolására az affin paraméterek lineárisan összefüggőek. *Ellenben két pont esetén kiszámolható a homográfia.*

2.6. SZÁMÍTÁSIGÉNY

Az ismertett módszer számításigénye egyenlő az inhomogén, lineáris egyenletrendszer megoldásával Moore-Penrose pszeudo-inverz felhasználásával. Ez szekvenciális feldolgozás esetén $\mathcal{O}(m^3) + \mathcal{O}(r^3)$ komplexitást jelent, ahol m a sorok száma az A együttható-mátrixban, míg r az A rangja. Megjegyezzük, hogy ez párhuzamos feldolgozás esetén $\mathcal{O}(m) + \mathcal{O}(r^3)$ -ra csökkenthető ¹⁵. Ennek következtében a módszer néhány milliszekundum alatt lefuttatható.

3. KÍSÉRLETI EREDMÉNYEK

Ezen fejezet elsődleges célja megmutatni, hogy az ismertett elmélet működik szintetikus és valós adatokon is. A bemutatott és a rivális módszerek is a Levenberg-Marquardt ¹⁶ numerikus optimalizálással fejeződnek be, mely a nemlineáris egyenletrendszereket optimalizálja. Rivális módszereknek a normalizált DLT és 3PT algoritmusokat választottuk.

3.1. SZINTETIKUS TESZTEK

A szintetikus színterek olyan módon készültek, hogy generáltunk két, P_1, P_2 perspektív vetítési mátrixot. Ezen két kamera pozícióját egy $S_c(u, v) = [u \ v \ 60]^T$, $u, v \in [-20, 20]$ síkon véletlenszerűen választottuk ki [†]. Mindkét

[†] Egyenletes eloszlást használtunk.

kamera az origó fele néz és a felfele néző irányuk véletlenszerűen lett beállítva. Ekkor a fundamentális mátrix kiszámolható két kameramátrixból⁹. Mindezek után 50 véletlen pontot generáltunk a $S_p(u, v) = [u \ v \ 0]^T$ parametrikus formulával megadott síkon minden egyes tesztesetre. Ezeket a tesztek 500-szor futtattuk le a különböző zajszinteken. A zajt[‡] a pontok koordinátáikhoz adtuk hozzá. Az affin transzformációkat az összes zajos pontból számított homográfiából számoltuk ki (3. egyenlet). Végezetül minden egy affin transzformációs mátrixot a már ismertett módon felbontottunk komponenseire (lásd 5. egyenlet).

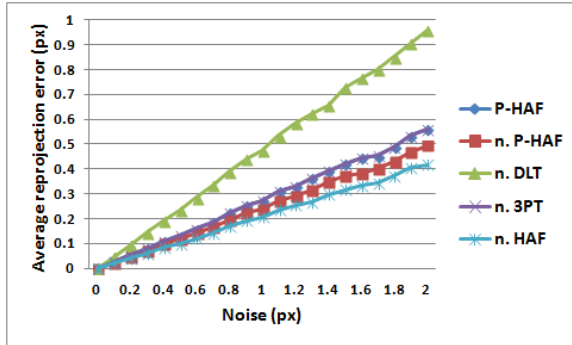


Figure 1: A különböző módszerek összehasonlítása szintetikus adatokon. A vízszintes tengely a pontkoordinátákhoz hozzáadott Gauss-zaj szórását (σ), míg a függőleges tengely az átlagos visszavetítési hibát jeleníti meg.

Az 1. ábra a különböző módszerekre vonatkozó hibát jeleníti meg növekvő zajszint esetén. A legpontosabb módszernek a HAF algoritmus bizonyult, ahogy az várható is volt. A második legpontosabb pedig a P-HAF. Megjegyezzük, hogy a medián hibák is hasonló trendet mutatnak.

3.2. VALÓS TESZTEK

A javasolt módszer valós szintéren való tesztelésének érdekében 50 különböző képpárt vettünk. Minden egyes sztereo beállításon detektáltunk és megfeleltettünk SIFT¹⁴ jellemzőpontokat. Ezután a fundamentális mátrixot a RANSAC 8-pontos algoritmussal⁹ határoztunk meg, ahol a RANSAC küszöbértéke 1.0 volt. A különböző pontmegfeleltetéseket klasztereztünk fősíkok szerint a T-Linkage¹⁷ eljárás segítségével. A javasolt és a rivális módszereket ezeken a különböző síkrégiókon futtattuk, és a vonatkozó visszavetítési hibák is ezek alapján lettek meghatározva. A homográfiákat a pontok 50%-ának felhasználásával becsültük meg, míg a módszerekre vonatkozó hibaérték kiszámításához a teljes ponthalmazt figyelembe vettük. A végső hibaérték az egyes módszerekhez tartozó

[‡] Itt zaj alatt nulla várható értékű Gauss-zajt értünk.

| Módszer | DLT | 3PT | P-HAF | n. P-HAF |
|---------|------|-----|-------|------------|
| hiba | 100% | 67% | 64% | 63% |

Table 1: A különböző módszerekre vonatkozó átlagos visszavetítési hiba aránya az 50 különböző teszteseten. Az arány a numerikusan optimalizált, normalizált DLT módszerhez viszonyított hiba.

| Teszteset | DLT | 3PT | P-HAF | n. P-HAF |
|-------------------------|-------|--------------|--------------|--------------|
| M. House (zöld) | 0.498 | 0.474 | 0.474 | 0.473 |
| M. House (lila) | 1.036 | 1.022 | 1.021 | 1.020 |
| Building 1. (fekete) | 0.542 | 0.487 | 0.486 | 0.486 |
| Building 1. (rózsaszín) | 2.344 | 0.904 | 0.903 | 0.903 |
| Building 2. (szürke) | 0.487 | 0.486 | 0.484 | 0.484 |
| Building 3. (szürke) | 0.900 | 0.771 | 0.767 | 0.765 |
| Building 3. (lila) | 1.092 | 0.702 | 0.704 | 0.704 |

Table 2: Az egyes módszerek átlagos visszavetítési hibája (pixelben) négy különböző teszteset vizsgálva: 'Model House', 'Building 1.', 'Building 2.' és 'Building 3.'

hiba százalékos aránya a numerikusan optimalizált, normalizált DLT-hez viszonyítva⁹. Megjegyezzük, hogy a HAF algoritmust itt nem tudtuk alkalmazni, hiszen nem ismertek a teljes affin transzformációk.

A 2. ábra négy különböző tesztesetet mutat be. Ezeken különböző színnel jelöljük a különböző síkrégiókhoz tartozó pontpárokat. Az ezekhez a tesztekhez tartozó hibát a 3.2. táblázat mutatja be. Látható, hogy a javasolt módszer adja a legpontosabb becslést egy esetet kivéve. Az is látható, hogy a különbség kicsi a 3PT és a P-HAF módszer között. Tapasztalataink alapján a DLT metódus nagyméretű, sok pontmegfeleltetést tartalmazó régiókra sokszor pontosabb becslést szolgáltat. A jelentős különbség, ami a 3.2. táblázatban is megjelenik, a kis méretű régiókból ered, ahol a DLT viselkedése instabillá válik.

4. KONKLÚZIÓ

A tanulmányban javasolt, homográfiát becselő módszer, kiterjeszti a hagyományos pont-alapú eljárásokat, felhasználva a különböző jellemző-pont detektorok által szolgáltatott egyéb információkat. Ennek érdekében az eredeti HAF algoritmust általánosítottuk különböző affin paraméterekre, mint például az elforgatás vagy a skála. Ez különböző típusú adatot szolgáltató jellemző-pont detektorokra egyszerűen módosítható. **A bemutatott módszer két fő újítást tartalmaz: (1) megmutattuk, hogy kizárólag a pontkoordináták használata információ-vesztést okoz, (2) és a homográfia a javasolt módszer esetében már két pontmegfeleltetésből is kiszámolható.**



Figure 2: A négy oszlop a négy különböző tesztet tartalmazza. Az egyes síkrégiókat különböző színekkel jelöljük.

References

1. Jin Zhou and Bing Li, "Robust ground plane detection with normalized homography in monocular sequences from a robot platform," in *Image Processing, 2006 IEEE International Conference on*. IEEE, 2006, pp. 3017–3020.
2. Jian Chen, Warren E Dixon, Darren M Dawson, and Michael McIntyre, "Homography-based visual servo tracking control of a wheeled mobile robot," *Robotics, IEEE Transactions on*, vol. 22, no. 2, pp. 406–415, 2006.
3. Zhengyou Zhang, "A flexible new technique for camera calibration," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 22, no. 11, pp. 1330–1334, 2000.
4. Toshio Ueshiba and Fumiaki Tomita, "Plane-based calibration algorithm for multi-camera systems via factorization of homography matrices," in *Computer Vision, 2003. Proceedings. Ninth IEEE International Conference on*. IEEE, 2003, pp. 966–973.
5. Zhou Chuan, Tan Da Long, Zhu Feng, and Dong Zai Li, "A planar homography estimation method for camera calibration," in *Computational Intelligence in Robotics and Automation, 2003. Proceedings. 2003 IEEE International Symposium on*. IEEE, 2003, vol. 1, pp. 424–429.
6. Zhongfei Zhang and Allen R Hanson, "3d reconstruction based on homography mapping," *Proc. ARPA96*, pp. 1007–1012, 1996.
7. Tomás Werner and Andrew Zisserman, "New techniques for automated architectural reconstruction from photographs," in *Computer Vision—ECCV 2002*, pp. 541–555. Springer, 2002.
8. Simon JD Prince, Ke Xu, and Adrian David Cheok, "Augmented reality camera tracking with homographies," *Computer Graphics and Applications, IEEE*, vol. 22, no. 6, pp. 39–45, 2002.
9. R. I. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, 2003.
10. Attila Tanacs, Andras Majdik, Jozsef Molnar, Atul Rai, and Zoltan Kato, "Establishing correspondences between planar image patches," in *Digital Image Computing: Techniques and Applications (DICTA), 2014 International Conference on*. IEEE, 2014, pp. 1–7.
11. Paresch Kumar Jain and CV Jawahar, "Homography estimation from planar contours," in *3D Data Processing, Visualization, and Transmission, Third International Symposium on*. IEEE, 2006, pp. 877–884.
12. Daniel Barath and Levente Hajder, "Novel ways to estimate homography from local affine transformations," in *In Proceedings of the 11th Joint Conference on Computer Vision, Imaging and Computer Graphics Theory and Applications - Volume 3: VISAPP, 2016*, pp. 432–443.
13. József Molnár and Dmitry Chetverikov, "Quadratic transformation for planar mapping of implicit surfaces," *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 48, pp. 176–184, 2014.
14. David G Lowe, "Object recognition from local scale-invariant features," in *Computer vision, 1999. The proceedings of the seventh IEEE international conference on*. Ieee, 1999, vol. 2, pp. 1150–1157.
15. Pierre Courrieu, "Fast computation of moore-penrose inverse matrices," *arXiv preprint arXiv:0804.4809*, 2008.
16. Jorge J Moré, "The levenberg-marquardt algorithm: implementation and theory," in *Numerical analysis*, pp. 105–116. Springer, 1978.

17. Luca Magri and Andrea Fusiello, "T-linkage: a continuous relaxation of j-linkage for multi-model fitting," in *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2014, pp. 3954–3961.