T A R T A L O M

"A matematika az emberi gondolkodás jellegzetes terméke. A megfigyelő értelem, a vállalkozó kedv és az esztétikai érzék egyaránt a legtisztábban fejeződik ki benne. Egyesiti magában a logikát és a szemléletet, az elemzést és a konstruálást, a jelenségek individualizálását és a megjelenési formák absztrakcióját. Lehet, hogy a divat vagy a hagyományok ezek közül az egyik vagy a másik szempontot helyezik előtérbe, a matematika tudományának életereje és legnagyobb értéke azonban ezeknek ez ellentéteknek összhangján és a szintézisükre való törekvésen alapul."

/Courant-Robbins, 1966 /

0. BEVEZETÉS

0.0 Mi ez?

Ez az anyag a pécsi „bölcsészkari" reform keretében bevezetésre kerülő "Formal Studies" [A matematika alapjai] két féléves (heti 2x1,5 óra) tantárgy tantervét irja le olyan részletességgel, hogy az előadó személyében bekövetkező esetleges változás ne befolyásolhassa érezhetően a leadott anyagot. Tény, hogy ilyen az előadó kezét szinte teljesen megkötő részletező leirás kisérleti tantervnél meglehetősen szokatlan. Ugy éreztük azonban, hogy a kiválasztott anyag csupán azt a minimumot tartalmazza, amely a korszerü bölcsészképzésben elengedhetetlen és mint ilyen meglehetősen független a szerzők izlésétől, képzettségétől és személyes preferenciáitól.

Az anyag első része a tanterv elbirálóinak szól: itt indokoljuk meg, hogy miért éppen ezt a felépitést választottuk, és hogy konkrétan miért azok a tételek, definiciók, modellek szerepelnek, amik. A második rész jelen formájában a tanárnak szól: itt adjuk meg a tanmenetet, óráról órára lebontva. Az első négy előadás olyan részletességgel van megirva, hogy akár a hallgatók is haszonnal forgathatják: ezek tulajdonképpen (erősen tömöritett) mintafejezeteknek tekinthetők a tantárgyhoz később megirandó jegyzetből. A későbbiekben azonban ez a rész egyre tömörebbé válik: tanulás céljára való felhasználását erősen megnehezitik (ha ugyan nem teszik lehetetlenné) a gyakori irodalmi hivatkozások. Képzett matematikusnak azonban nincs szüksége ezekre a hivatkozásokra: a második részben leirtak <u>az előadó számára</u> teljesen egyértelmüen definiálják nemcsak a tananyagot, hanem annak felépitését, és általunk kivánatosnak érzett prezentációs módját is. Az első négy előadástól eltekintve tehát a második rész jelen formájában lényegében tanári segédkönyv.

Ily módon tehát a <u>mit tanitunk</u> kérdésre tulajdonképpen a második rész válaszol, bár azok akik a megfelelő matematikai ismeretekkel rendelkeznek, erről viszonylag pontos képet kaphatnak akkor is, ha csupán az első részt tanulmányozzák át, mivel ez a második rész tartalomjegyzékeként is olvasható.

A harmadik rész a tanárnak és a diáknak közösen szól: itt olyan példákat és feladatokat ismertetünk, amelyek az anyag elsajátitásához nélkülözhetetlenek (erről bővebben lásd. 0.2)

A negyedik rész több mint egyszerü irodalomjegyzék: itt ismertetjük részletesebben, hogy a tananyag elsajátitásában, kiegészitésében és/vagy tanitásában a felsorolt müvek milyen részei milyen szerepet kap(hat)nak. Ez a rész nem csupán a tanárnak (vagy a diáknak) szól: itt találhatók a jelen anyagban idézett munkák adatai is.

Az ötödik rész a hallgatóság kiválasztására szolgáló tesztet (ld. 0.2) és annak kiértékelési utasitását tartalmazza. Ez a rész kizárólag a tanárnak szól: a függelék forma (tehát a tanterv egészétől való teljes különválasztás) azt a célt szolgálja, hogy a jelen anyag e függelék csatolása nélkül is értékelhető legyen.

Még mielőtt a tananyag részletes indokálásába (1) és ismertetésébe (2) belemennénk, fontosnak tartjuk, hogy tisztázzuk az oktatás céljait (0.1), eszközeit (0.2), és azt, hogy mindebből mi mások szellemi tulajdona (0.3).

0.1 Miért?

"Több mint kétezer éve már, hogy minden müvelt ember szellemi fegyvertárához tartozik némi jártasság a matematikában. Napjainkban azonban a nevelés terén súlyos veszélyben van a matematikának ez a tradicionális helyzete. Szerencsétlenségünkre, a matematika hivatalos képviselői is felelősek ebben. A matematika tanitása sok helyütt üres feladat-megoldások begyakorlásává süllyedt, ami hasznnos lehet ugyan a képletek alkalmazása szempontjából, de sem igazi megértéséhez, sem nagyobb szellemi függetlenséghez nem vezet. Ugyanakkor a matematikai kutatás nagyon hajlamos lett a túlságos szakosodásra, és azx absztrakció fontosságánaak túlzott hangúlyozására. Elhanyagolják az alkalmazásokat és a rokon területekkel való összefüggésseket. Tanitók, tanulók és a müvelt közönség egyaránt konstruktiv reformokat igényelnsk, nem pedig visszavonulást a legkisebb ellenállás irányába. Az a céljuk, hogy organikus egészként értsék meg a matematikát, mint a természettudományos gondolkodás és cselekvés alapját."

/Courant-Robbins, 1966 /

A bevezető idézetben emlitett tradició természetesen nem szolgálhat a (bölcsészkari) matematikaoktatás indokául, annál is kevésbé, mert azt látjuk, hogy egyetemi (bölcsész) képzés lehetséges számos egyéb hagyományosan kulcsfontosságunak tartott tényező (latin nyelv, egyetemi önkormányzat stb.) nélkül is. A "két kultúra" (Snow, 1959) körül kialakult vita óta eltelt két évtized azt is megmutatta, hogy milyen hiábavaló ebben az ügyben az emberi kultúra egységére, sőt "oszthatatlanságára" hivatkozni. Megpróbálunk tehát a miért oktassunk matematikát kérdésre nem az értékek, hanem az érdekek szempontjából adni választ, és ez által egyben az oktatás céljait is tisztázni.

0.11 Az a tény, hogy technikai civilizációban élünk, és ennek a civilizációnak a gerincét a (matematizált) természettudományok adják, olyan közismert, hogy gyakran már fel sem tünik. Az "egzakt" tudományok a társadalmi berendezkedésre, jogszokásokra, az emberi magatartásra és kultúrára gyakorolt oriási hatása azonban éppoly kevéssé érthető az e tudományok alapjait képező matematika nélkül, mint mondjuk a középkori (világi) irodalom a Biblia nélkül. A matematika tehát hatással van mindazokra a jelenségekre, amelyek a humán tudományok vizsgálati területébe tartoznak, igy ismerete az ott bekövetkező változások okainak feltárásában egyre kevésbé nélkülözhető. Tekintve azonban, hogy ez a hatás meglehetősen közvetett (és időben nagy késéssel jelentkezik) elegendőnek tünhet olyan matematikatörténeti (vagy általában tudománytörténeti) oktatás is, amelynek a matematika anyagához alig van köze.

Az ilyesfajta oktatás szerepe a korszerü (természettudományos!) világkép kialakitásában nyilvánvaló, és úgy véljük, hogy erre külön tantárgyként szükség is lenne. Van azonban egy olyan terület, ahol a matematikai eszmék és a humán tudomány közti kapcsolat sokkal közvetlenebb, tehát az előző érvelés direkten alkalmazható a matematika (és nem a tudománytörténet) oktatása fontosságának igazolására. Ez a terület pedig a filozófia, ahol sem a korunkban vezető szerepet játszó scientista ideológia, sem pedig az ennek alapjait képező (neo)pozitivista filozófia megértéséhez nem elegendő az idevágó matematikai eredmények puszta ismerete, hanem érteni is kell azokat.*[Ugy tünik, hogy e nézetek 'antimarxista'-ként való elitélése egyszerüen meg nem értésükből (ha úgy tetszik, a szükséges matematikai alapismeretek hiányából) fakad. A helyzet kisértetiesen emlékeztet a genetika vagy a mélylélektan 'burzsoá áltudomány'-ként való megbélyegzésére.] A tudományban szokásos munkamegosztás (amely pl. a népszaporulattal foglalkozó szociológus számára megengedi, hogy csupán ismerje, de ne értse a fogamzásgátló tabletta hatását) tehát ezen a ponton nem szolgáltat a (jövendő) bölcsészek számára kibúvót: a idevágó matematikai eredményeket nem csupán ismerniük kell, hanem meg is kell érteniük. Az 1. részben tárgyaljuk azt a kérdést, hogy mely matematikai eredmények birnak direkt filozófiai relevanciával.

0.12 Bár a matematikai kétségkivül hat a humán tudományos vizsgálatok tárgyára, sokkal fontosabb ennél, hogy eszközzé is válhat ezekben a vizsgálatokban. Az hogy a természeti jelenségek leirásában (sőt megértésében) a matematikai modellek milyen óriási szerepet játszanak, aligha szorul bizonyitásra. Közismert az is, hogy a matematika ilyen formán való felhasználása ma már kiterjed a humán tudományok széles körére is: a nyelvészet vagy a közgazdaságtan ma már legalább annyira egzakt tudományok, mint mondjuk a biológia. Ilyen modelleket azonban csak illusztráció képpen ismertetünk majd (ennél többre nyilván nem is nyilna lehetőség), mert úgy véljük, hogy ez alapjában a megfelelő szaktárgyak (adott esetben a nyelvészet illetve PG) körébe tartozik.

Fontosabbnak itéljük ennél a modellezési készség kialakitását, tehát azt, hogy a hallgató absztrakt struktúrákat legyen képes felismerni a konkrét jelenségek mögött, és ezekről szabatos (formális) leirást tudjon adni. A matematikaoktatás mindig is kitünő terep volt az absztrakciós készség kialakitására * [bár ezen az alapon szinte bármiféle matematika tanitható], és korunk matematikája számos olyan 'előregyártott' strukturát kinál, amik ráillenek (vagy legálábbis ráhúzhatók) a humán tudományokban vizsgált jelenségekre.

Tekintve, hogy ezek a jelenségek általában túl bonyolultak ahhoz, hogy modelljeiket analitikus úton ki lehessen értékelni, a társadalomtudományokban (és az ugynevezett 'embertudományokban') nagy szerepet kapnak a szimulációs modellek. Ugy véljük, hogy a számitógép (mint a szimuláció eszköze) egyre inkább be fog vonulni a humán tudományok területére (ezt általában a változók nagy száma is szükségessé teszi), és a matematika bölcsészkari oktatásával együtt kell járnia a 'kompjuterszabatos' gondolkodásmód kialakitásának.

0.13 A szabatos gondolkodás mindenfajta tudományos tevékenység alapvető kritériuma: korrekt okfejtésre, a helyes és helytelen ~~okfejtés~~ következtetés megkülönböztetésére minden jövendő tudósnak képesnek kell lennie. Nem állitjuk természetesen, hogy a formális logika szabályainak ismerete elengedhetetlen a szabatos (informális) gondolkodáshoz, de tény, hogy a humán tudományok területén, ahol már az értelmetlen (jelentés nélküli) és értelmes kijelentések megkülönböztetése is időről-időre gondokat okoz, az ilyesfajta ismeretek gyakran igen hasznosnak bizonyulnak. Itt jutunk vissza a bevezető idézetbe szereplő "szellemi függetlenség"-hez, ami nem más, mint a rivális elméletek tárgyilagos vizsgálatának (és összehasonlitásának) a képessége. Amig tehát az előző szakaszban a valóság és az elmélet összahasonlitásának képességéről beszéltünk, azaz az absztrakt modellek empirikus tényekkel való összehasonlitásáról (már amilyen korlátok között ez egyáltalán lehetséges), addig most elméletek egymással való összehasonlitásáról van szó. Tapasztalati tény, hogy a matematikai logikai tanulmányok fejlesztik a higgadt véleményalkotásra, az érvek (és ellenérvek) érzelmi és faktuális tartalmának különválasztására való képességet. Ez a hatás (mégha a pontos mechanizmusát nem is ismerjük) önmagában elégséges indoka lehet a formális logika oktatásának, legalábbis azok szemében, akik a szellemi függetlenséget fontosnak itélik. Tekintve, hogy ez utóbbi érv távolról sem értékmentes, a logika tananyag kiválasztásában inkább egyfajta (szüken vett) hasznossági kritériumot fogjunk használni: erről bővebben az 1. részben.

0.2. Hogyan?

> "A könyvnek a fő célja, ami reméljük nem elérhetetlen hogy a matematika iránt érdeklődő hallgatókat az analizis néhány fontos területéről vett, módszeresen elrendezett feladatok segitségével hozzászoktassa az önálló gondolkodás és kutatás módszereihez és eszközeihez." /Pólya-Szegő, 1980/

A matematika oktatásában hagyományosan más szerepe van a példáknak és a feladatoknak. Ismét nem a tradició azt, ami miatt példák és feladatok egész sorával (3.rész) egészitettük ki a szüken vett tananyagot (2.rész).

0.21 A példák szerepe nem csupán abban áll, hogy a definicókat érthetőbbé teszik, vagy a tételeket illusztrálják (bár ez a funkciójuk is igen hasznos, különösen kezdetben), és nem is abban, hogy biztositják a definiciók ellentmondásmentességét, bár új definiciók esetén ez is igen fontos. A példák esetünkben a (0.12-ben emlitett) modellezési készség kifejlesztését szolgálják: ahelyett tehát, hogy ismertetnénk egy új fogalom (pl. lineáris rendezés) definicióját, előbb példákat hozunk (pl. testmagasság, szenioritás) és ezek jellemző vonásaiból 'alkotjuk meg' a definiciót. Ez az eljárás, (amelyet igyekszünk következetesen végigvinni) azzal az előnnyel jár, hogy különböző, de rokon fogalmak (példánkat folytatva: előrendezés, rendezés, háló, stb.) világosan elkülönülnek már bevezetésükkor. Hátránya viszont, hogy a hallgató a modellezés alapjául szolgáló (jól ismert) jelenségből kialakitott szemléletes képet esetleg kritika nélkül átviszi a megfelelő matematikai fogalomra; ennek elkerülése érdekében lehetőleg nagyszámú, és meglehetősen különböző természetü példát kell hozni. Az absztrakció módszerének és eredményének elkülönitése azonban (kellően kiválasztott hallgatóság esetén) nem okozhat túl nagy nehézséget, különösen ha ennek fontosságával az előadó is tisztában van.

Igy tehát a matematikában szokásos "az absztrakttól a konkrétig" prezentáció helyett a "konkréttól az absztraktig" megközelitést választjuk, ahol csak erre mód nyilik.

Ez az 'induktiv' módszer (bár kétségkivül időigényes) jóval kevesebb matematikai érettséget vár el a hallgatóktól, mind a 'deduktiv' megközelités, igy előnyei a bölcsészkari matematikaoktatás számára nyilvánvalóak.

<u>0.22</u> A feladatokkal való foglalkozás fő előnye az, hogy nem csak az anyag <u>ismeretét</u> tesztelhetjük le, (erre éppenséggel memoriter felmondatása is alkalmas lenne) hanem <u>megértését</u> is. Könnyen látható, hogy a témába vágó feladatok megoldására való képesség szükséges és elégséges feltétele az anyag megértésének: ha a hallgató meg tudja oldalni a (megfelelően kiválasztott) feladatokat, akkor érti az anyagot, azaz a megszerzett absztrakciót (ld.0.12) egyedi esetekre is alkalmazni tudja, ~~xxxxxxxxxx~~ ha pedig nem képes megoldani a feladatot, akkor nem ismerte fel a konkrét eset mögötti strukturát, azaz éppen absztrakciós készségével (esetleg logikus gondolkodásával [ld. 0.13]) van baj. A feladatok tehát alapjában "gyakorlat" jellegüek (e megkülönböztetést szisztematikusan végigviszi például Vinogradov, 1950), és uj ötletet igénylő <u>feladatok</u> kitüzésére csak akkor kerülhet sor, ha a hallgatók a gyakorlatokat már rutinosan végzik (legjobb ha már unják őket).

Mindez szükségessé teszi, hogy a hetenként rendelkezésre álló három órát előadásra és gyakorlatra bontsuk fel.*
[Általában a 1 1/2 óra előadás, 1 1/2 óra gyakorlat arány tünik célszerűnek, de annak érdekében, hogy ezen

módositani lehessen, célszerü a rendelkezésre álló időt folyamatosan illeszteni az órarendbe (pl. reggel 8-11-ig) annál is inkább, mert ez lehetővé teszi, hogy a sorrendet és az arányokat alkalomról alkalomra rugalmasan osszuk be.]

Megjegyzés. Elméletben lehetséges, hogy a gyakorlatokat más vezesse mint aki az előadásokat tartja, de tekintettel az oktatás kisérleti jellegére és az előadó és a gyakorlatvezető között mindenképpen szükséges szoros együttmüködésre, egyelőre ezt nem javasoljuk.

Itt térünk ki a hallgatók teljesitménye értékelésének kérdésére is: kivánatosnak tartjuk, hogy minden gyakorlat végén (vagy elején) a hallgatók fél órás (3 feladat) (röp)-dolgozatot irjanak, és az érdemjegyet lényegében ezek átlaga határozza meg. * [Elképzelésünk szerint a dolgozatokban mutatott teljesitmény alapján a gyakorlatvezető megajánl egy jegyet a hallgatónak, aki (ha jobb jegyet kiván) vizsgázhat a szóbanforgó félév anyagából. E vizsga lehet szóbeli vagy irásbeli - ezt döntsék el a diákok.]

Természetesen a 3. fejezet csupán óráról órára lebontva kerülhet a hallgatókhoz, és az ott leirt feladatok helyett jövőre már másoknak kell szerepelni a röpdolgozatokban. Az ilyen módon összegyülő feladatok néhány év múlva esetleg egy példatár kiadását is lehetővé teszik.

Még két olyan vonása van ennek a tantervnek, amit külön szeretnénk kiemelni.

0.23 Különösen fontosnak tartjuk, hogy minden tétel (definició) a legteljesebb matematikai szigorusággal kerüljön tárgyalásra: nemcsak azért mert az ilyen (formális) tárgyalás bizonyos tekintetbe hozzátartozik a matematika lényegéhez, hanem azért is, mert egyes anyagrészek (pl. infinitézimálisok) másfajta tárgyalása rendkivül kockázatos, u.i. nehezen kimagyarázható félreértésekhez vezethet. A precizitást természetesen nem kell a végletekig vinni (a 2. részből világos lesz, hogy pontosan meddig kivánunk elmenni) és a hallgatóság matematikai érettségének fejlődésével párhuzamosan a szigoru tárgyalás egyre inkább informálissá tehető. Ez a folyamat azonban nem torkollhat népszerüsitésbe: minden fogalmat definiálni és minden tételt bizonyitani kell. Ez alól kizárólag olyan tételek lehetnek kivételek, amelyek bizonyitása az adott előképzettséggel már önállóan megérthető, és magyar nyelven elérhető. Ebben az esetben is szükséges azonban a tétel pontos kimondása és a bizonyitás helyének pontos megjelölése. Hangsulyozzuk, hogy a matematikaoktatás nem tételismertetés: az anyag megértetésére törekszik. Éppen ezért (hacsak nem házi feladat volt a bizonyitás elolvasása) a csupán kimondott tételeket a továbbiakban sehol sem használjuk.

<u>0.24</u> Időről időre elmondunk (bizonyitunk!) u.n. nemtriviális tételeket is. Ez kettős haszonnal jár: egyrészt a hallgató jobb képet kap arról, hogy a matematika milyen hatalmas szellemi tőkét képvisel, másrészt jobban megismeri a formális gondolkodásmód jellegét, módszereit és buktatóit is.

A 'mély' tételek értékelését elősegiti, ha ezeket az előző gyakorlaton (csillagos) feladatként kitüzzük, amennyiben erre mód nyilik. Általában előnyben részesitjük a mély eredményeket a kevésbé szemléletformálókkal szemben (ezt ugy is fogalmazhatjuk, hogy a lehető legnagyobb hatást kiváltó anyagot kivánjuk leadni), de nem törekszünk arra, hogy az alkalmazott bizonyitási módszerek erejét a végsőkig kihasználjuk - a kimondott tételek nem feltétlenül 'élesek'.

Mint az eddigiekből is látható, a tananyag elsajátitása kiváló képességeket és jelentős aktivitást (tehát érdeklődést) kiván meg a hallgatóktól. Nyilvánvaló, hogy ezen feltételek egyike sem tételezhető fel egy teljes évfolyamról. Ami az érdeklődést (tehát az önkéntességet) illeti, ehhez nem ragaszkodunk, mert az a véleményünk, hogy a tananyag alkalmas bármely intellektuálisan nyitott hallgató érdeklődésének felkeltésére és fenntartására. Ragaszkodnunk kell azonban a kiváló képességekhez (nem matematikai képességekről vagy előképzettségről van szó, hanem általános intelligenciáról) és úgy véljük, hogy a hallgatóság teszttel való (elő)szelekciója okvetlenül szükséges. A függelékben közölt tesztet erre a célra dolgoztuk ki: úgy véljük, hogy egy kétszáz fős évfolyamból kb. 150-en a minimális pontszámot sem fogják elérni, és legfeljebb 5-6 olyan hallgató lesz, aki a teszt alapján kétségkivül alkalmas a tantárgy befogadására. * [Tekintve, hogy az ilyesfajta felmérésre alkalmas feladatok (pl. "megcsalt férfiak") igen gyorsan terjednek szájról-szájra, a teszt kipróbálására (pl. elsőéves müegyetemi vagy matematikus hallgatóságon) nem nyilik mód, és a fenti arányokat nem tudjuk garantálni. Könnyeb tesztet nem kivánunk késziteni, mivel az nem biztositaná a kivánt szinvonalat, de nehezebb készitése (amennyiben a függelékben leirt teszt nem rostálná meg eléggé az évfolyamot) nem ütközik nehézségbe.] A létszámnak a tervezett 12 főre való feltöltése történhet a fennmaradó negyvenvalahány hallgató utótesztelésével, de ennél célszerübbnek tünik a 'természetes szelekció': ezek a hallgatók látogathatják az első néhány előadást, és a gyakorlatokon (és röpdolgozatokban) nyújtott teljesitményük dönt. Előszelekcióra azonban <u>mindenképpen</u> szükség van.

Ugy véljük, hogy a 0.1 pontban leirt célok nemcsak a tárgyalásra kerülő anyagot, hanem a tárgyalás imént leirt módszereit is meglehetősen szükségszerüvé teszik: ezt azonban itélje meg az olvasó.

0.3 Köszönetnyilvánitás

A matematikai tételek és definiciók szellemi tulajdonjoga igen kevéssé megállapitható, különösen azért mert ezek általában hosszú csiszolódás és egyszerüsödés során nyerték el mai formájukat. A tananyag <u>nem</u> tartalmaz olyan tételt (definiciót), amely a szerzőktől származik, bár a bizonyitások némelyike jelen formájában legjobb tudomásunk szerint új. Az irodalomjegyzékben (és időről időre a tételek neveként) megkiséreltük az általunk előnyben részesitett bizonyitások (definiciók) <u>egy</u> forrását feltüntetni, de nem biztos, hogy a bizonyitás (az adott formában) valóban az idézett mü szerzőjétől származik. Az 1., 2., és 3. fejezetek felépitése párhuzamos: mindegyik 4. negyedévre tagolódik, ezekből az első három Kornai András, a negyedik Prószéky Gábor munkája. Ennek az anyagnak az összeállitásához számos ötlettel és tanáccsal járult hozzá Prószéky Gábor, de a tervezett negyedik negyedéves anyagokat sajnos sohasem írta meg.

- itt is szeretnénk kifejezni nekik hálánkat.

1. TANTERV

A matematika oktatáeát némileg megneheziti az a tény, hogy az egyes fejezetek nagymértékben egymásra épülnek: valószinüeégszámitási ismeretek például - eltekintve a megtéveeztően egyszerü véges esettől - nem szerezhetők a mértékelmélet (absztrakt Lebesgue-integrálok) ismerete nélkül. A mértékelmélet oktatása feltételezi az analizie elemeiben, a valós függvénytanban ée az n-dimenziós euklideszi terek geometriájában való jártaseágot, és a valószinüségszámitás több tételének bizonyitáeához a komplex függvénytan eszközeire ie ezükség van. A példák a végtelenségig ezaporithatók lennének - az mindenesetre már ebből az egyből is világosan látható, hogy bizonyos területek iemertetését hiába indokolná alkalmazhatóságuk (0.12) -két félév alatt egyszerüen nem kerülhetnek tárgyalásra. Ide tartozik a valószinüségszámitáeon kivül a katasztrófa--elmélet és (a rendelkezéere álló idő rövidségére való tekintettel) a lineáris algebra haladottabb fejezetei is. Egy olyan előadásban, amely a nulláról indit (eemmilyen formában nem támaszkodunk a középiskolás matematika-anyagra*

[Mégha el ie tekintünk attól, hogy a hallgatók szükeégképpen különböző ezinvonalu előismeretekkel érkeznek az egyetemre, a középiskolai tananyag nem-szabatoe jellege ée - nyugodtan mondhatjuk - érdektelensége önmagában elégséges ok arra, hogy a gimnáziumi anyag 'továbbfejleeztése' helyett inkább a rossz emlékek elfeledtetésére törekedjünk.]

két félév alatt semmiképpen since módunk eljutni ezekhez, az egyéni és társadalmi viselkedés vizsgálatában oly fontos szsrepet játszó területekhez.

Itt fogalmazzuk meg a 0.13 részben emlitett hasznossági kritériumot: amennyiben valamely egyébként fontosnak itélt anyagrész ismertetéséhez szükséges egy másik anyagrész előzetes elsajátitása, akkor ez utóbbi oktatására előbb kell, hogy sor kerüljön. A 'filozófiai relevancia' (a továbbiakban röviden "0.11") és az 'alkalmazhatóság' (ezentúl "0.12") kritériumaival ellentétben tehát ez az érv ("0.13") az anyagrészek oktatásának sorrendjét is indokolja.

Jslen fejezet feladata tehát röviden igy is fogalmazható: mi az a maximális (két félévben előadható) tananyag, amsly 'didaktikailag zárt' azaz eleget tesz 0.13-nak, és ~~akkalá~~ bölcsészkari oktatásban megindokolható, azaz eleget tesz 0.11-nek ill. 0.12-nek. AE tananyag kiválasztására a következő (mohó) algoritmust használjuk: tekintsünk egy didaktikailag zárt részhalmazt, és amennyiben még fér valami a két félévben, kiválasztunk egy ujabb anyagrészt (0.11 vagy 0.12 alapján), és az ezzel bővitett tanterv didaktikai lezártját képezzük. Ezt az eljárást addig iteráljuk, amig a két félév be nem telik. Kiindulópontunk az üres halmaz vagy, ha jobban tetszik az a feltevés, hogy matematikát fogunk tanitani.

1.1 Alapok

Bármiféle matematika tanitásához elengedhstetlen a matematika alapjainak, azaz a halmazelméletnek és a matematikai logikának az ismerete. Mielőtt rátérnénk arra, hogy pontosan mit is kivánunk megtanitani ezzel az indokkal, röviden kitérünk arra, hogy miért nemválasstjuk a legkorszerübb (mindössze a hatvanas évek közepe óta létező) u.n. kategória-elméleti megalapozást.

Azon kivül, hogy nem tünik tisztességesnek olyan anyagot leadni, ami még angol nyelven sincs monografikus szinten feldolgozva (tehát a diák nem mshet utána) és magyarul pedig egyáltalán nem érhető el, didaktikailag kockázatosnak tünik olyan absztrak formalizmus ismertetése, amely - bár hatalmas msnnyiségü - matematikai anyagból lett slvonva, a 'valósághoz' kevés köze van.* [Bizunk abban, hogy az általános iskolai "uj matematika" eléggé felkészitette a diákokat arra, hogy a halmazelméleti absztrakciókat be tudják fogadni.] Ily módon tehát a kategóriaelméleti megalapozás összegyeztethetetlen az általunk kivánt "induktiv" oktatási móddal és - legnagyobb sajnálatunkra - le kell mondanunk róla. Megjegyezzük, hogy ez a megalapozás sem tenné szükségtelenné a matematikai logika ismertetését, hiszen a (0.13-ban emlitett) "szabatos gondolkodás" a matematikusok számára máig a formális logika szabályainak betartásával egyenértékü.* [Ebből a szempontból a formális logika nem visszavonulóban, hanem előretörőben van: a természettudományos világképben az utóbbi száz évben bekövetkezett változások (különösen a kvantummechanika megjelenése) az informális 'józan ész'-szsl kapcsolatban fokozott óvatosságra intensk. Nyugodtan mondhatjuk, hogy a logika ma már átksrült a filozófia birodalmából a matematika területére, ugyanúgy, ahogy a kozmológia ma már a fizikához és nem a filozófiához tartozik. Az ezen a téren a szocialista országokban folytatott utóvédharc (u.n. "dialektikus logika") kilátástalannak tünik. Ezt természetesen nsm jelenti azt, hogy a 'korrekt okfejtés' formalizálása ma már befsjezett folyamat: különösen a valószinüségi és a fuzzy logika/területén sok még a tisztázatlan kérdés.]

Tskintve, hogy a halmazelméletet is szigoru formában kivánjuk ismsrtstni (ld.0.23), a logikával kell kezdenünk, igy az első órán a predikátumkalkulus szintaxisát ismertetjük.

Az induktiv pedagógia módszer (ld.0.21) amit követni kivánunk, szükségessé tsszi, hogy az előadást egy olyan példa vezesse be, melyen a matematikai gondolkodásmód jellegzetes vonásai könnyen tanulmányozhatók. Választásunk az Arrow-féle lehetetlenségi tételre esett, mivel ez humán alkalmazásban született (0.12) előismeretek nélkül is könnysn követhető, és talán némi filozófiai relevanciával (0.11) is bir. Mivel a bevszető előadás nem csupán az ismeretszerzést, hanem a hallgatók orientálását is szolgálja, a későbbiekhez képest aránytalanul részletesen van leirva. Különösen vonatkozik ez az általunk szükségesnek vélt 'filozófiai' eszmefuttatásokra: négy oldalt szenteltünk csupán a matematikai tételek cáfolhatatlan jellegéből adódó következtetések levonására. Ugy véljük, hogy a matematikai igazságok bizonyos vonásainak (absztraktság) ennek okainak (logikai úton nyerjük) és következményeinek (szélesebb körben alkalmazható mint amire eredetileg szánták) hangsulyozáea hoseszú távon ie gyümölcsöző lehet.

Tekintve, hogy az előadáseorozat folyamán az előadó ugyis a saját matematika-filozófiáját érvényesiti, azok a matematikáról szóló fejtegetések melyeket az anyag elszórtan (és az eleő előadás koncentráltan) tartalmaz, pusztán az ilyeefajta fejtegetések az előadásban elfoglalt arányát és nem pedig tartalmát hivatottak jelezni. Konkrétan az eleő előadás esetében ez annyit jelent, hogy az óra kb. egyharmadát ilyesfajta fejtegetésekre tartjuk célszerünek szánni(ez az arány a félév folyamán állandóan csökken, és az első négy-öt előadáe után már sehol nem éri el az öt százalékot), de az előbb felsorolt jellemzők bármelyikét (és esetleg máeokat is) nyugodtan tárgyalhatja az előadó, és egyáltalán nem fontos, hogy a cáfolhatatlanság ezek között kitüntetett szerepet kapjon. Bár a jegyzet ilyesfajta részei időről időre meglehetősen határozott állásfoglalásokat tartalmaznak például az axiómatikus módszer, a konstruálhatóság, vagy éppen az empiria ~~kérdésének~~ szerepének kérdéeében, ezekkel sem kivánjuk megkötni az előadó kezét azon túl, hogy a szóbanforgó kérdésről valamely időpontban (és ez sem szükségképpen esik egybe azzal az időponttal, amikor a kérdést az anyag ezerzői felvetik) nem ártana ezót ejtenie.

A predikátumkalkulus megértéséhez ~~xlxxxdxkx~~ elengedhetetlen, hogy a hallgató e kalkulusban felirt elméletre ezámos példát lásson: ezek körül az első természetesen a halmazelmélet kell, hogy legyen. A második előadás tárgya tehát a halmazelmélet axiómatikus megalapozása. Mi a

Zermelo-Fraenkel-féle felépitést választottuk,az előadó azonban - ha úgy itéli helyesnek - nyugodtan használhatja például a Gödel-Bernays axiómarendszert is, a fontos csupán az, hogy a tárgyalás szigoruan axiómatikus legyen. A harmadik előadásra hagytuk a relációk fogalmának ismertetését: e fogalom kulcsszerepére való tekintettel csupán az ekvivalencia-és rendezési relációkkal kapcsolatos triviális tételek kerülnek bizonyitásra, az idő fennmaradó részét gyakorlásra szánjuk. A negyedik előadás a függvény és a müvelet intuitiv fogalmának halmazelméleti megalapozásával foglalkozik - itt ismertetjük a természetes számok standard modelljét is.

Az első négy (szorosan összefüggő) előadás tehát azt a 'technikai minimumot' öleli fel, amely nélkül a matematikában egy lépést sem lehet tenni. Igazság szerint ehhez a technikai minimumhoz tartozik még a függvényeket karakterizáló különféle tulajdonságok (injektivitás, etb.) és a függvények kompoziciója is: didaktikai okokból azonban ezt az anyagrészt az ötödik gyakorlatra halasztottuk, amikor már hasznos példákat tudunk hozni nemcsupán számok, hanem pl. hálók közti függvényekre is. Az egész anyagrészt kitünően összefoglalja Robinson (1974) 2.1 (6-7.old) és Benkő (1975) 0.1 (200-213.old): az első négy előadásnak és az ötödik gyakorlatnak a célja mindössze ennek a (16 oldalban leirható!) anyagrésznek, az Arrow-féle lehetetlenségi tételnek és a Peano-axiómák standard modelljének ismertetése.

Az anyag középpontjában a strukturákkal való ismerkedés áll (ennek indokait ld. 1.2 alatt): induktiv módszerünk értelmében a negyedév hátralevő részét (tehát három alkalmat, u.i. minden negyedévben hagyunk egy tartalék órát) konkrét strukturák ismertetésével töltjük. A választott strukturák a hálók és Boole-algebrák: az ötödik előadásban kerül ismertetésre ezek elsőrendü elmélete. Ily módon a hallgatóknak nem csupán két ujabb axiómatikus elmélet megismerésére nyilik módja, hanem a rendezési relációkról és a halmazmüveletekről szerzett ismereteit is általánosithatja. A hatodik előadáson igazoljuk, a Zorn lemmát (0.13, 0.24) majd ideálokkal, filterekkel és ultrafilterekkel foglalkozunk (0.13), és belátjuk a Stone-féle reprezentációs tételeket (0.24). Ezt annál is inkább szükségesnek érezzük, mivel a struktura-tételek a matematika igen jellegzetes termékei, és más ilyen eredmény ismertetésére nincsen mód.

A hetedik előadáson a kijelentéskalkulust (0.11) mint szabad Boole-algebrát vezetjük be és vizsgáljuk, mégpedig a hallgatósággal együttmüködve, közös problémamegoldás formájában: ez a forma bizonyos mértékig arra is módot nyújt, hogy lemérjük, mennyire sikerült kitüzött céljainkat (ld. különösen 0.12) az első negyedévben megvalósitani. A nyolcadik (tartalék) előadás témája a magasabbrendü predikátumkalkulus szintaxisa: erről az anyagrészről azonban csupán akkor tartjuk érdemesnek beszélni, ha a többi anyagot a hallgatók már kifogastalanul elsajátitották.

Az első negyedév anyagának elsajátitását jelentős mértékben megkönnyiti az a tény, hogy a tárgyalásra kerülő anyagrészek számos kiváló, magyar nyelven elérhető tankönyvben megtalálhatók: ezek közül is külön kiemelnénk Halmos-Siegler (1981) tankönyv-példatárát, melynek első 16 fejezetét[x] [A 13. fejezet (aritmetika) kivételével: ennek ismertetésére ugyanis csupán a második félévben kerül sor, egy olyan anyagrész (a számkör felépitése) keretében, ahová természetes módon illeszkedik.] (13-66. old.) és a hozzájuk kapcsolódó példákat (101-134. old.) szinte "törzsanyagnak tekintjük. Az ezen túlmenő logikai, hálóelméleti és jóléti közgazdaságtani anyagrészekhez már csak külön-külön tudunk irodalmat javasolni (ld. 4.), és itt ie igen gyakran kényszerülünk a miénktől (és egymástól) eltérő terminológiáju müvek emlitésére. Tisztában vagyunk vele, hogy ez az eljárás a hallgatók helyzetét igen nehézzé teszi: különössn vonatkozik ez az önálló készülésben még járatlan elsőévesekre. Ezt a problémát azonban csupán egy jegyzet oldhatná meg, márpedig végleges jegyzet megirásának nyilván csak néhány tanév tapasztalatai birtokában van értelme.

Végül szerstnénk röviden kitérni e tanmenet egy olyan vonására, amely látszólag ellentétben áll az általunk követni kivánt induktiv pedagógiai módszerrel - arra tudniillik hogy a hagyományos felépitéstől eltérősn ebben a tantervben a predikátumkalkulus ismertetése <u>megelőzi</u> a kijelentéskalkulus tárgyalását. Véleményünk szerint ezt a megoldás igen sok előnnyel jár: egyrészt lehetővé teszi hogy a hallgató megkülönböztesse a matematikai jellegü anyagrészeket a (különösen az első néhány előadásban igen gyakran előforduló) 'filozófiai' okfejtésektől, másrészt módot ad arra, hogy a kijelentéskalkulust mint <u>problémát</u> tárgyaljuk. Mivel a szükséges apparátusnak addigra már birtokában vannak, a hallgatók, felismerhetik a kijelentéskalkulus mögött a lényeget t.i. a (szabad) Boole-algebrai strukturát. Ez igen előnyös a tárgyalás mélysége (ld.0.24) szempontjából, annál is inkább, mivel hasonló szintü tárgyalásra, (pl. cilindrikus algebrák ismertetésére) a predikátumkalkulus esetében semmiesetre sem nyilik mód a rendelkezésre álló idő rövidsége miatt. Mi több, hosszabb távon az induktiv szempont is igy tünik a legjobban érvényesithetőnek, mivel a hallgató igy először példát kap a nyelv és a matenyelv elkülönitésére (ez a modális logika tárgyalásánál lesz fontos) és szabad strukturákra (ez pedig a formális nyelveknél). A predikátumkalkulus ismertetésére mindenképpen sor kell kerüljön valahol (0.11, 0.12, 0.13): az, hogy ezt nem halasztjuk későbbre azzal az előnnyel is jár, hogy a tárgyalás kezdettől fogva elegendően szigoru (ld. 0.23) lehet. Ezáltal a hallgatónak módja nyilik rá, hogy ezt a tantárgyat meg tudja különböztetni a többitől: itt végülis formális studiumokról van szó.

1.2 Strukturák

"A folytonosságról kiváló előszeretettel nyilatkoznak a nem mathematikus filozófusok, rendszerint azonban a delosi jósoknál is misztikusabban: idézem itt Russel szavait, melyek nemcsak Hegelre találók: ... a Hegeli kijelentést, miszerint minden ami diszkrét, egyben folytonos is, és viszont, engedelmesen és unalmasan hangoztatják követői is. De azt, hogy mit is értenek folytonosságon és diszkrétségen, diszkrét és folytonos csenddel takarják."

/Riesz, 1926/

Az első negyedévben ismeretetett anyag technikai szempontból még számos irányban továbbfejleszthető, mélyithető, és elaborálható lenne, ez azonban nem szolgálná különösebben céljainkat, t.i. a matematikát kreativ módon problémák modellezésére és megoldására használó bölcsészek képzését. Éppen ezért a tananyag középpontjában a matematikai modellezés épitőköveivel, a strukturákkal való ismerkedést állitottuk;e döntésünket azzal is indokolhatnánk, hogy a strukturális gondolkodásmód ma már a humán tudományok szinte minden területére behatolt.

Szükségesnek láttuk mind folytonos, mind diszkrét strukturák ismertetését, mivel a humán tudományokban a folytonos és diszkrét jelenségek vizsgálatára egyaránt sor kerül (bár kétségkivül ez utóbbi a gyakoribb). Induktiv módszerünk értelmében tehát a strukturafogalom ismertetését meg kell előznie folytonos strukturákról hozott példáknak is: az elős két (szorosan összefüggő) előadás tulajdonképpen ezt a célt szolgálja.

Az első előadásban a metrikus terek elméletének elemeit ismertetjük (ezt az anyagot kitünően összefoglalja Benkő (1975) 1.1-1.2 (11-16.old.)). Itt ismertetjük a Kuratovszky axiómákat (topológikus térről sajnos szen túlmenően nincs módunk beszélni) és az n-dimenziós euklideszi teret is: ezek későbbi tanulmányaink szempontjából is igen hasznosak. A második előadás az előző órán szerzett ismereteket egésziti ki és konkretizálja $\mathbb{R}^n$-ben: itt tulajdonképpen az analizis alapvető tételeit ismertetjük, és ha az idő megengedi akkor egy mélyebb eredményt is: belátjuk, mindenütt folytonos, de seholsem differenciálható függvény létezését.(0.24).

Tény, hogy a függvénytan (az egy közgazdaságtant kivéve) nem nagyon hatolt be a humán tudományokba, és az ismertetett tételeknek tudtunkkal nincs semmilyen közvetlen alkalmazása ezeken a területeken. Ugy éreztük azonban, hogy a matematikának e talán legnagyobb (de a természettudományos alkalmazások szempontjából mindenképpen legfontosabb) területe mellett nem mehetünk el szó nélkül.* [Ezt a kis kitérő egyébként nem csupán a harmadik negyedév előkészitéséhez hasznos (0.13) hanem azzal az előnnyel is jár, hogy a hallgatók ezen a ponton össze tudják mérni ennek az előadásnak a módszereit (és szinvonalát) a középiskolai matematikaoktatásával.]

Mindezek után a harmadik előadáson kerül sor az algebrai struktura ismertetésére: itt sorra bevezettük a monoid, csoport, ábel-csoport, gyürü és test fogalmát, majd az általános (univerzális algebrai) strukturafogalmat ismertetjük. Itt definiáljuk a részstruktura és a direkt szorzat fogalmát is, továbbá sor kerül a kompatibilitás, kongruenciareláció, faktorstruktura fogalmának ismertetésére is, részint az eddigi anyagból vett, részint új példák alapján. Az alapvető fontosságu homomorfia-tétel ismertetése után generált részalgebráról, illetve kongruenciákról beszélünk, és definiáljuk egy algebra részalgebra- illetve kongruenciahálóját is. Mindez módot nyújt az algebrai lezárási rendszer lezáráeára, és ezáltal a folytonos ée diszkrét strukturák közti kapcsolat mggvilágitására.

Ha eltekintünk attól, hogy a negyedik gyakorlat egy réezét még a harmadik előadás anyagának gyakorlására szánjuk, elmondhatjuk, hogy az első négy előadás anyagához hasonlóan az első 10 (+ 1 tartalék) előadás anyaga is didaktikailag zárt. A félév hátralevő részében ismertetendő anyagot 0.12 alapján választottuk ki: a negyedik ötödik előadásban a formális nyelvek,és automaták elméletével, a hatodik - hetedik előadáson pedig lineáris algebrával foglalkozunk. (E két tömb, és az első három óra az előadásban elfoglalt sulyának némi rugalmasságot kölcsönöz, hogy a tartalék órára nem jelöltünk ki külön témát: ezen az előadáson a hallgatóság előmenetelének és érdeklődésének megfelelően kiválasztott anyagot lehet tárgyalni.)

Mivel a számitógép megértéséhez e terület főbb gondolatainak ismerete elengedhetetlen, a formális nyelvek oktatását 0.13 alapján ie indokolhattuk volna; hangsulyozzuk azonban, hogy ez az elmélet a nyelvészetnek (és nem csupán a generativ paradigmának) ma már szervee része, igy előadáeunkban mindenképp helyet kell kapjon. Hasonló állitás igaz a lineáris algebrára is: a közgazdaságtan deskriptiv és preskriptiv ágai egyaárnt használják ezt a formalizmust, igy ismertetésére legalábbis alapszinten mindenképpen szükség van.

Ösezefoglalóan elmondhatjuk, hogy az első félévben a logikai szemantika kivételével (erről a harmadik negyedévben lesz szó) lényegében minden olyan anyagrészt érintünk, ami 0.12 alapján megindokolható, és két féléves bölcsészkari oktatás keretében egyáltalán tárgyalható. Hangsulyozzuk azonban, hogy ez a két félév rendkivül kevés*: [Legalább két félévet igényelne, ha ismertetni kivánnánk mindazt, ami az automata-elméletből a nyelvészetben effektive felhasználásra kerül a szintaxis-kutatásban: hasonló állitás igaz a matematikai logikáról (szemantika) és a matematikai analizisről is.(fonetika). A társadalomtudományi kutatásokban használt matematikai apparátus nagyságáról némi képet ad, ha megemlitjük, hogy a magyar közgazdászképzésben (amely távolról sem nevezhető formális orientációjunak) az összóraszám kb. egyharmadát ennek ismertetésére szánják.

Meggyőződésünk szerint szoros összefüggés van a humán tudományok szinvonala és a hozzájuk kapcsolódó matematika oktatás szinvonala között: a nemzetközi összehasonlitás (és talán a különböző tudományágak összevetése is) ezt igazolni látszik. Nem állitjuk, hogy ebből a korrelációból ok-okazati összefüggésre lehetne következtetni, de ugy véljük, hogy mindenképpen előnyös következményekkel járna ha a matematika oktatása a bölcsészképzésben ~~jóval nagyobb~~ a tervezettnél jóval nagyobb súlyt kapna.] hosszabb előadás keretében jóval több kérdésről lehetne szó (pl. a pszichológia vagy az etika területéről). Mi több egyes anyagrészek "érintése" helyett mód nyilna azok alapos tárgyalására és ezáltal a szóbanforgó területek formális apparátusának készségszinten való begyakoroltatására, ami annál is fontosabb, mivel ez bizonyos mértékig előfeltétele a matematika kreativ alkalmazásának.

1.3 Számok

A harmadik negyedév anyagát 0.11 alapján indokoljuk: az itt tárgyalt anyagrészek ~~xkx~~ célja az elmélet és a modell, az igazság és a szükségszerüség viszonyának feltárása: e kérdések filozófiai relevanciája ugy véljük nem szorul igazolásra.

Az első előadáson átismételjük és kiegészitjük az (elsőrendü) predikátumkalkulusról tanultakat: bevezetjük az (elsőrendü) struktura és az interpretáció fogalmát, és definiáljuk az idekapcsolódó legfontosabb fogalmakat. (kielégithetőség, bizonyithatóság, függetlenség, stb.). A kijelentéskalkulussal való párhuzamosság illusztrálása végett belátjuk a prenex normál-forma tételt. Az alkalmazott logikai megközelités és 0.11 indokolttá tenné a Gödel-tételek ill. a Löwenheim-Skolem-tételek bebizonyitását: a harmadik negyedévben rendelkezésre álló idő azonban erre ~~xxx~~ nyilván nem elegendő. Meg kell tehát elégednünk ~~xxxxx~~ a szintaxis és a szemantika viszonyának kevésbé mély feltárásával: erre kiváló módszernek tünik az aritmetika elemeinek ismertetése.

A második előadásban tehát nem standard modell adunk a Peano-axiómákra (az ultraszorzat konstrukció segitségével) és igazoljuk, hogy ez ω bővitésének tekinthető. Megkülönböztetünk belső és külső részhalmazokat ω^* -on, és ezeket részletesebben is megvizsgáljuk.

A harmadik előadáson a számkört kiterjesztjük $\mathbb{R}$-ig: a folyamatot végig a nemstandard modell segitségével illusztráljuk.

A negyedik és ötödik előadáson az infinitézimálisokkal való számolással foglalkozunk, és az analizis egyes alaptételeinek nemstandard bizonyitását adjuk.

A szükségszerüség vizsgálata természetesen az intenzionális (és általában modális) logikai kalkulusok ismertetését takarja: a hátralevő előadásoknak ez a témája. Amennyiben az idő megengedi, a tartalék órán ismertetjük a Montague-grammatikát, illetve annak Keenan-Falz-féle változatát. Igy tehát az utolsó három előadás témaválasztását nemcsak 0.11 , hanem 0.12 alapján is indokolhatnánk, legalábbis azok számára, akik a logikai szemantikát elfogadják nyelvi tények modelljeként.*[E kérdésben a nyelvészek véleménye távolról sem egységes.]

Mindezzel szemben első pillantásra különösnek tünhet, hogy a nemstandard analizis három teljes előadást kap egy bölcsészeknek szánt tantervben akkor, amikor az alkalmazásokban kulcsfontosságu területek pl. információelmélet, játékelmélet szóba sem kerülnek. Nem indokolhatjuk ezt a választást azzal, hogy a tananyag ilymódon szerves egészet alkot, hisz más anyagrészek, pl. a klasszikus algebra számos fejezete ugyanigy beilleszthető lett volna a tantervbe. Az első rész elején emlitett "egymáraépülés" sem lenne akadálya annak, hogy a harmadik negyedévben nemstandard analizis helyett pl. játékelméletet tanitsunk. Ugy véljük, hogy a nem standard analizis a tananyagban elfoglalt kitüntetett helyét az eddigieknél részletesebben meg kell indokolnunk, különösen annak fényében, hogy ez az anyagrész ma még a tudományegyetemek matematikaszakának tantervében sem szerepel.

Ami az alkalmazásokat illeti, fontosabbnak találtuk a matematikai modellezés kreativ müveléséhez elengedhetetlenül szükséges absztrakt gondolkodásmód kialakitását (ld. 0.12) mint a létező alkalmazások részletező ismertetését. Ugy véljük, hogy az alkalmazások korai megismerése hosszu távon rendkivül káros, mert csupán a már megismert modellek büvköréből kitörni nem tudó, a matematika alkotó felhasználására képtelen tudománytechnikusok sorozatgyártását segiti elő. A rendelkezésünkre álló két félév mindössze az alkotó modellezéshez szükséges ismeretanyag egy töredékének átadásához elegendő: ugy véljük azonban, hogy a jelenleg rendelkezésre álló óraszám duplájában ez a kérdés megoldható lenne. A fentebb emlitett alkalmazások oktatásának csupán akkor látjuk nagyobb hasznát, ha a hallgató ezeket négy félévnyi "absztrakt" matematika birtokában már kellő perspektivából tudja szemlélni. Az ilyen perspektiva megteremtéséhez elengedhetetlen az u.n. mély anyagrészek oktatása (erről ld. még 0.23) ráadásul ezek a hallgatók szellemi igényességét is stimulálják, ami nem lebecsülendő szempont.

Ezek az érvek azonban alapjában negativak: ilyen alapon a matematikai bármely "mély" és "absztrakt" fejezetét, pl. Galois elméletet is tanithatnánk a harmadik negyedév első felében. Vannak azonban olyan érvek, melyek többé-kevésbé specifikusan a nemstandard analizist tüntetik ki az ilyesfajta anyagrészek körül, ezeket vesszük most sorra.

<u>1.31 Magyarázó erő</u> A matematikát történetileg felfoghatjuk úgy, mint olyan tudományt, amely számokkal, alakza-

tokkal, és ezek messzemenő általánositásaival foglalkozik. A számok központi szerepe az emberi gondolkodás számos szférájában közismert, és úgy tünhet, hogy az intuitiv számfogalommal meglehetősen jól el lehet boldogulni. Éppen ezért, a számkör szigoru felépitése nem tünik többnek, ~~xixk~~ valamiféle fontoskodásnál, mindaddig, amig fel nem ismerjük, hogy a számokról radikálisan különböző intuitiv elképzelések lehetségesek sőt jogosak. A nem-standard analizis az a tour de force, ami világossa teszi a hallgatók előtt, hogy a formális logika nem valamiféle precizkedés szülte ad hoc gépezet, hanem olyan eszköz, amelylyel lényeges problémákról releváns információkat szerezhetünk.

1.32 Szemléletformáló hatás Mint 1.3 elején megjegyeztük, a rendelkezésre álló idő nem teszi lehetővé a 0.11 alapján indokolható anyag egyetlen mély eredményének tárgyalását sem. Ugyanakkor az elmélet és a modell viszonyával minden hallgatónak tisztában kell lennie: ehhez pedig induktiv módszerünk értelmében ugyanannak az elméletnek kell radikálisan különböző modelljeit ismertetni. Sajnálatos módon algebrai strukturák különböző modelljeinek (pl. különböző gyürüknek) bemutatása nem alkalmas erre: a hallgatók 'gyürüfogalmába', 'metrikus térről alkotott képébe' stb. ezek a példák még beleférnek. Az abszolut ~~xxxxx~~ geometria modelljeinek (tehát Euklidesz-i ill. Bolyai geometria) szabatos ismertetése az egész rendelkezésünkre álló időt kitöltötte volna - és a hatás ezzel távolról sem lett volna arányban, mivel a hallgató hallott már valamit nem euklideszi geometriáról. Mivel a geometrián kivül a számok az egyetlen matematikai fejezet, amelyről a hallgatónak határozott intuitiv képe van, egyszerüen nincs más terület ahol a Hilberti programból adódó szemlélet kudarcát bemutathatnánk. A nemstandard analizis ebből a szempontból annál is sikeresebbnek igérkezik, mert minden hallgató meg van róla győződve, hogy tudja, hogy mik a számok.

1.33 Korszerüség Ha végigtekintünk a tananyagon, azt látjuk, hogy néhány klasszikus tétel és definició kivételével (ezek együttesen a tananyag kevesebb mint tiz százalékát teszik ki) az első félév kizárólag 1900 és 1930 közt született eredményeket tartalmaz. Ez a korszak azonban Bourbakival lezárult és (bár a matematika nem avul el) korunk matematikája már távolról sem ilyen. Természetesen szó sem lehet arról, hogy izelitőt adjunk a ma folyó kutatásokról, hiszen képzett matematikusnak is általában évekig tart, mig eljut egy uj terület frontvonalába. Ugy véltük azonban, hogy az az ötven év késés egy kicsit sok, és legalább egy területen viszonylag uj eredményeknek is kell kerülniük az előadásban A hagyományos matematikai területek uj eredményeinek értékeléséhez ~~xxxxxx~~ tisztában kell lenni a régi eredményekkel, igy a szóbanforgó területet kizárólag az ujonnan keletkezettek közül lehet kiválasztani. Az univerzális algebra, vagy a kategóriaelmélet kevéssé érdekes ha nem ismerjük azokat a területeket, amelyeket ezek általánositanak (ld. még 1.1). A kombinatorikán kevéssé érzékeltethető a korszerü matematikai szemlélet: a legtöbb eredmény akár kétezer éve is megszülethetett volna. Bár kisebb mértékben, de ugyanez áll a formális nyelvek elméletére - ez születhetett volna akár a harmincas-negyvenes években is. Mindezekkel szemben a nemstandard analizis az ötvenes évek logikai kutatásainak szellemében fogant (196o őszén), első monografikus tárgyalása 1966-ból származik, és első tankönyvszerü ismertetése 1976-ban jelent meg. Olyan területről van tehát szó mely még a matematikusképzésben sem nyerte el végleges helyét, és tanitásával az előbb emlitett 50 év késésből legalább harmincat (de az oktatás a kutatáshoz mért elmaradásának figyelembevételével ennél jóval többet) le lehet faragni. A nemstandard analizis oktatását kizárólag sajátos jellege teszi lehetővé: olyan területről van szó ugyanis, ahol a legkönnyebben elsajátitható eredmények a klasszikus analizis több száz éves tételei, melyek már a középiskolás oktatásban is leszivárogtak.

Ismét hangsulyozzuk, hogy semmilyen formában nem kivánunk a középiskolában megszerezhető matematikai ismeretekre támaszkodni ~~xxxxx~~ de ennek az anyagrésznek a felfogását nagyben elősegitik a gimnáziumból hozott homályos matematikai emlékek is.

Mindezeket összevéve ugy gondoljuk, hogy ma a nemstandard analizis a legkorszerübb fejezete a matematikának, amely előadásunk keretei közt egyáltalán tanitható.

1.4 Gépek

A negyedik negyedév anyaga sok mindenben különbözik az előző három negyedévétől, annak ellenére, hogy azok fontosabb eredményeire igen sok ponton támaszkodik. A "számitógép",

"programozás" (sőt, "betáplálás") kifejezések a hétköz-
napi életben egy gyakorlati alapon elsajátitható terület-
nek a terminusai: mi ezt a területet mégis olyan ol-
dalról közelitjük meg, amelyikről ritkábban szokás. A
formális nyelvek elmélete, az automata-elmélet, az algo-
ritmuselmélet, a rekurziv függvénytan előző félévben
tárgyalt eredményei nagyon messze vezethetnek annak elle-
nére hogy a gyakorlatban igen sokszor konkrétan megjele-
nő problémákból származnak. Nem célozhatjuk tehát meg
(egy egyéves tárgy utolsó 7 alkalmával) az előbb felsorolt
területek még közepesen részletes kifejtését sem. Mi több,
kimondottan le kell szükitenünk ismertetendő anyagunkat
arra, amit egy bölcsészpálya előtt álló hallgató 3/4
tanév alapján szerzett formális rutinja (és elméleti is-
meretei) megengednek, ám ugyanakkor a számitógépek alapvető
müködési elveinek alaposabb megértéséhez mégis elvezet-
nek. Bár ez a leszükités nem mehet az egzaktság rovására,
figyelembe kell vennünk, hogy a valóságban létező számi-
tógépek jobb megismerését és megértését kifejezetten hát-
ráltatja a túlformalizálás: a formális számitógép-modellek
olyanok kezei alatt születnek, és olyan számára iródnak,
akik már megfelelő módon tájékozottak a gyakorlati szá-
mitástechnika területén. Tehát joggal érezzük ugy, hogy
az általában tömörebb tárgyalásmódot lehetővé tevő de-
duktiv módszer e negyedévben éppen a kevés időre való te-
kintettel lehet kifejezetten hátrányos.* [Az előző negyed-

években nem egészen ezek okok miatt választottuk az induktiv felépitést: ld. 0.21.]

A kizárólagosan gyakorlati példákból kiinduló induktiv közelités viszont azért lehet hátrányos, mert a hallgató - még ez alatt a rövid idő alatt is - teljesen elvesztheti a fonalat: nem érezné, hogy valójában hogyan illeszkednek a számitógépek az addigra (reméljük) kialakitott absztrakt szemlélethez. Az első három negyedév formalizmusai után az elsősorban praktikus szempontokat hangsulyozó negyedik negyedév utolsó perceiben mégegyszer felvillanhatna néhány 'matematikaibbnak' tünő eredmény, de aztán a hallgatók emlékezetében hamar elhalványodna, hiszen (közvetlen) folytatása nem lenne.

Ezzel szemben, mi azt az utat választjuk, hogy az első három negyedévben a számitógépek és algoritmusok elméletének már tárgyalt pontjait felidézzük, és a mostanra már jól ismert véges automatáktól próbálunk meg eljutni a Turing-gép fogalmáig.

Az algoritmikus fogalmazásmód elemeit ezek után a Turing-gép programozása (valamint az automata-osztályok közötti különbségek szemléltetésére használt folyamatábrák) kapcsán ismeri meg a hallgató. Ez a hagyományos programozási nyelvek elsajátitásához is elengedhetetlen.* [Konkrét programozási nyelvek tanitására a rendelkezésre álló idő természetesen nem nyujt módot.] A Turing-gépek kapcsán a legfontosabb algoritmuselméleti és kiszámithatóság-elméleti problémákról is beszélünk, de mélyebb eredményeket nem ismertetünk, mivel a gyakorlati ismeretek megszerzésére már igy is meglehetősen szüknek látszik a fennmaradó négy előadás, ahol a valódi számitógépek felépitésről szándékozunk valamiféle áttekintést adni.

A hallgatóknak a következő számitástechnikai fogalmakról van valamiféle ismerete az eddig tárgyalt anyag alapján: algoritmus, program, input (szalag), output, olvasó-, iró-müveletek, tárak, verem, folyamatábra, blokk, elágazás, ciklus, programnyelv, "magas szintü" nyelv.

A gép felépitése, a gépi kodú, az assembler és a "magas szintü" nyelvek ismertetése ezekből a fogalmakból igen jól felépithető. A magas szintü nyelvek (számitógép általi) megértése kapcsán ~~sxixk~~ a szintaktikai elemzésről is szó esik, méghozáá a nyelvosztályokról az előző félévben szerzett ismeretek felelevenitésével: ezután kerülhet csak sor a forditás kérdéseinek megtárgyalására.

A jövőben egyre inkább elterjedő ujelvü nyelvekről is itt esik szó. A formális nyelvek és a predikátumkalkulus rokonsága már az előző félévben előkerült, most pedig a rekurzió fogalmának gyakorlati (PROLOG nyelvü) példákon való ismertetése lehetővé teszi a hallgatók számára a logikai programozás elemeinek gyors elsajátitását, annál is inkább, mert mindezt valószinüleg könnyebben fogják fel, mint a hagyományos algoritmikus nyelveken nevelkedett "profi" programozók.

A perifériákról és az egész müködést koordináló operációs rendszerekről az anyag végén esik szó. Ezekről teljesen informális ismeretek is elegendőek, részletekről legfeljebb asak egy olyan tárgy keretében lehetne beszélni, ahol "éles" programokat irhatnának a hallgatók. Az elvi alapok tisztázásához még ilyen szintü ismeretekre sincs szükség. A tapasztalat szerint a humán szakon végzettek igen kicsiny százaléka fog személyesen számitástechnikai munkát végezni - az eddigiekből mág nyilvánvaló hogy nem is tekinthetjük célunknak a hallgatóság erre való felkészitését.

Érzésünk szerint a jövőben egyre több ellentmondás születhet abból, - és sajnos a jelenlegi helyzet is ezt támasztja alá - hogy humán területen mozgó, de számitástechnikai alkalmazásokkal ~~még~~ eddig még nem találkozó megrendelő képtelen elképzeléseit olyan fommában a számitógépes szakemberek asztalára tenni, hogy ~~xxxxx~~ azoknak ez maradéktalanul értelmezhető feladat-leirást jelentsen. Ilyenkor a számitógépes szakember saját elképzelése szerint (ez sokszor még a legjobb indulat esetén sem esik egybe a felhasználó vágyaival) elkészit valamit és (optimális esetben) ezt a megrendelő vélt igényei szerint egyszer vagy többször még átjavitja. Nem meglepő, hogy ez a folyamat, ahol a programozó igen gyakran meg van róla győződve, hogy tudja, sőt jobban tudja a felhasználónál, hogy az mit akar, csak igen ritkán vezet sikerre. A negyedik negyedév célja éppen ezért a fentebb emlitett ellentmondás olymódon való feloldása, hogy a hallgatókat (amenynyire tudjuk) 'egyenrangusitjuk' a számitástechnikai szakemberekkel.

Az algoritmikus, illetve a logikai sémák szerint leirt (strukturált) problémamegoldási javaslatokat - még ha elnagyoltak is - könnyebb birálni, javitani,megvalósitani, számitógépre vinni, mint a "lazán" megfogalmazott elképzeléseket. Ezért az egzakt gondolkodásra nevelő formalizmusokban kivánjuk otthonossá tenni a hallgatókat, akikmek ha jövendő hivatásukat magas szinten kivánják müvelni olyan eljárásokat kell majd alkalmazniuk, amelyek a formális elméleteket és a számitástechnika (ujabb) eredményeit használják.

2. JEGYZET

2.1 Első negyedév: alapok

1. Előadás: A predikátumkalkulus szintaxisa

Az általános - és középiskolai oktatás azt a benyomást kelthette a hallgatóban, hogy a matematika számokkal, háromszögekkel, függvényekkel (tehát tipikusan "matematikai" objektumokkal) foglalkozó tudomány, afféle receptgyüjtemény, amelynek egyetlen haszna az, hogy segitségével meg tudjuk állapitani, hogy ha 7 pók 7 nap alatt 7 legyet fog akkor a másfél pók másfél nap alatt hány legyet fog. Az ugynevezett "szöveges feladatok" mesterkélt jellegük miatt nagy számuk ellenére is csak igen kevéssé alkalmasak arra, hogy a hallgatót meggyőzzék róla, hogy a matematika ennél többre is képes. Az a tény, hogy a természettudományokban, és különösen a mérnöki tudományokban a matematika széles körü felhasználásra kerül, igen kevéssé érdekes a bölcsészeknek, akik a legritkábban kerülnek numerikus jellegü adatokkal kapcsolatba, és még ezek az adatok is többnyire megbizhatatlan (és érdektelen) statisztikák végeredményei.

Nem különösebben meglepő, hogy az alsó- és középfoku oktatás félrevezető képet fest arról, hogy egy tudomány milyen is valójában (nyelvész szakosok igen hamar rá fognak döbbenni, hogy annak amit nyelvtan cimén eddig tanultak vajmi kevés köze van a nyelvészethez.) hiszen az ilyen oktatás elsőrendü célja bizonyos, a mindannapi életben nélkülözhetetlen készségek (pl. szorzás osztás vagy a nyelvtannál maradva helyesirás) betanitása. Az egyetemi okta-

tás azonban nincs ilyen ballasztokkal megterhelve, így a matematika oktatás közel kerülhet ahhoz, ami a matematika valójában, t.i.
problémák megoldása a józan ész módszeres alkalmazásával.

Szándékosan nem fogalmaztunk ugy, hogy 'matematikai problémák megoldása ...' - szó nincs arról, hogy egy problémában pontoknak, egyeneseknek, szakaszoknak, háromszögeknek vagy éppen számoknak kellene szerepelnie. (Hogy a geometriai problémák e megoldási technikáiról - mert tulajdonképpen ez a geometria - ma olyan sokat tudunk az annak köszönhető, hogy a görögök - némi joggal - fontosnak itélték a külvilág tárgyai formájának vizsgálatát.) Mielőtt továbbmennénk, és tisztáznánk, hogy mit értünk "józa észen" és "módszerességʺ-en, előbb egy példát hozunk nem munerikus problémára.

A probléma, amit elemezni fogunk a választásokkal - vagy általában emberek véleményének összeegyeztetésével kapcsolatos. Tegyük fel, hogy egy bizonyos kérdésben emberek egy közössége n alternativa között választhat: pl. egy bizonyos tisztségre n jelöl pályázik. Az n=1 esetben nincs választás, az n=2 esetben pedig a kérdés eldöntése igen egyszerü: pl. 'többség dönt' úton.* [Annak ellenére, hogy a probléma n=2 esetben triviális, a valóságban ez az eset igen fontos marad, hiszen az összes 'igen-nem'kérdés' ennek az esetnek felel meg.] Nem foglalkozunk azzal a kérdéssel, hogy mi van akkor, ha a szavazás eredménye döntetlen (n=2-nél) mert csodákra a matematika sem képes - mint látni fogjuk, az igazi probléma ennél jóval mélyebben fekszik, és sokkal valószinübb * [egy kis kitérő azoknak, akik értik: ha 2k szavazó (döntetlenhez eleve muszáj hogy páros sokan legyenek) 5o-5o százalék valószinüséggel egymástól függetlenül szavaz igennel vagy nemmel (az 5o százalékos szavazatarány is valószinüsíti a döntetlent), akkor a döntetlen valószinüsége $\binom{2k}{k}2^{-2k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$ ami pl. k=100 esetén $<6\%$, hogy bekövetkezzen. n=3-nál már igen gyakori, hogy egyik alternativa sem kap abszolut többséget - ilyen esetben gyakran számitásba veszik , hogy második helyen hányan szavaztak az illetőre.(erre igen könnyü példát hozni). A modell, amit tekinteni fogunk ilyen szempontból semleges: lehetőséget ad arra, hogy belekalkuláljuk a második, harmadik stb. helyre tett javaslatokat, de ez a bekalkulálás történhet 'O súllyal' is, azaz nem vagyunk kötelesek figyelembe venni ezt. Tételezzük fel, hogy az összes szavazó rangsorolja az összes alternativát: tehát pl. 'lggjobb ha A-t választják meg, de ha nem őt választanák, még mindig jobb, ha B-t mintha C-t, stb.' Annak ellenére, hogy a szavazás kiértékelésénél nem feltétlenül vesszük figyelembe az összes információt, elvárjuk, hogy ez a rangsorolás <u>teljes</u> legyen, azaz a szavazó bármely két lehetőségről mondja meg, hogy melyiket szeretné jobban a másiknál. Elvárjuk azt is, hogy a szavazó ne bonyolódjék önellentmondásba, azaz ha számára A jobb mint B (jelben $A>B$,)és $B>C$, akkor persze $A>C$ is álljon fenn. Később megindokolandó terminológiával ezt úgy mondhatjuk, hogy a szavazó az alternativákat <u>lineárisan rendezi</u>, azaz sorbaállitja.

A továbbiakban egy szavazat alatt éppen egy ilyen sorbaállitást értünk, és ha szükség van rá, a $>$ jel indexében feltüntetjük a szavazat leadóját. Amit tehát keresünk az egy olyan szavazatkiértékelő rendszer, amely a befutó szavazatok ismeretében megállapitja az alternativák végső sorrendjét. Tetszőleges ilyen szavazatkiértékelő rendszert $\mathcal{C}$ -vel fogunk jelölni és <u>alkotmánynak</u> hivjuk. Az alkotmány által kialakitott végső sorrendet $\leq_{\mathcal{C}}$ -vel fogjuk jelölni. Ez a sorrend nem feltétlenül <u>szigoru</u> (később majd definiáljuk, hogy általában ezen mit értünk,) de elvárjuk, hogy teljes legyen, azaz bármely két lehetőség A és B közül a szavazás végeredményeképpen $A <_{\mathcal{C}} B$, $A =_{\mathcal{C}} B$ vagy $A >_{\mathcal{C}} B$ valamelyike kialakuljon, és a $\leq_{\mathcal{C}}$ jel a 'szokásos módon' viselkedjen.

Bármely szavazatkiértékelő rendszertől megkövetelhető lenne a 'többség dönt' el: azaz ha az $A > B$ szavazatok száma meghaladja az $A < B$ szavazatokét, akkor $A >_{\mathcal{C}} B$ is fennáljon. Mi ennél jóval kevesebbet követelünk meg: azt várjuk el csupán, hogy az <u>egyhangu</u> véleményt respektálja az alkotmány:

1.) Ha <u>minden</u> szavazó szerint $A > B$, akkor $A >_{\mathcal{C}} B$ (tetszőleges A, B lehetőségek esetén) teljesüljön.

Ezt a (hansulyozzuk, igen gyenge) feltevést a továbbiakban <u>követési tulajdonságnak</u> nevezzük: a $\mathcal{C}$ alkotmány követi a szavazók egységes akaratát.

A most következő tulajdonságokat mindenki magától értetődőnek tekinti; annyi mindenesetre elmondható, hogy világos kimondásukkal nem fogjuk nehéziteni a probléma vizsgálatát.

2.) Az alkotmány legyen <u>jól definiált</u>, azaz a szavazás tetszőleges kimenetele esetén szolgáltasson végeredményt, és ha a szavazást megismételjük - és mindenki ugyanúgy szavaz, mint ez előbb - akkor a végeredmény se változzon. Ismét később bevezetendő terminológiával: a $\leq_e$ végeredmény legyen a $<_x$ szavazatok (és csak a szavazatok) determinisztikus függvénye, amely mindenütt értelmezve van.

3.) Az alkotmány legyen monoton, azaz ha a szavazás valamely kimenete esetén $A<_e B$, akkor ezen ne változtathasson az, hogy a szavazók egy része aki eddig nem igy szavazott, most $A<B$-vel szavaz (ha a többi szavazat változatlan). Ez a feltétel, hogy t.i. olyan szavazatmódositást, amely az egyik jelölt (lehetőség) számára előnyös, a végeredményben ne sújthassa hátrányosan a jelöltet, olyan természetes, hogy kimondása szinte feleslegesnek tünik. Elképzelhetőek azonban a monotonitási feltételnél erősebb (hasonló jellegü) feltételek is: pl. $A=_e B$ esetén, ha valamelyik szavazó aki eredetileg $A<B$-vel szavazott, ezt $A>B$-re cseréli, (miközben a többiek nem változtatják meg a szavazatukat) a végeredményben ez billetse a mérleget A javára, tehát legyen $A>_e B$. Ezt a feltételt (vagy más u.n. szigoru monotonitási feltételt) azonban nem követeljük meg, és a 3. feltétel szabatos kimondásának haszna éppen abban áll, hogy ezt nyilvánvalóvá is teszi.

4.) A függetlenség feltétele az első olyan, amelyik nem teljesen magától értedődő: arről van szó, hogy az A és B közti alternativában hozott döntést ne befolyásolják a szavazók véleménye egy (az előzőktől különböző) C lehetőségről. Bár egy ilyen feltételt megkövetelni semmibe sem kerül, erősen vitatható, hogy a valóságban előforduló alkotmányok (vélemény-összeegyeztető rendszerek) mennyire teljesitik ezt a feltételt.

Nem nehéz olyan alkotmányt találni, amelyik az eddigi feltételek mindegyikének eleget tesz: ilyen például a következő:

$\leq_e$ legyen egyenlő az egyik szavazó (mondjuk x_o) szavazatával. Világos, hogy ez az alkotmány bir a követési tulajdonsággal (hiszen ha mindenki szerint $A < B$, akkor speciálisan $A <_{x_o} B$ is fennáll, és ekkor szükségképpen $A <_e B$), és jól definiált. Monotonitása szintén magától értetődő: ha x_o-tól különböző ember változtatja meg a szavazatát, az semmit sem számit, ha pedig x_o, akkor ez előnyösen hat arra a lehetőségre, amelyet most előnyben részesit, igy itt szigorú monotonitás is teljesül (sőt a végeredmény nem is $\leq$, hanem $<$ tipusu sorbaállítás, hiszen az eredeti szavazat is az volt).

Tekintve, hogy a vélemények összeegyeztetésének meglehetősen speciális (bár tagadhatatlanul gyakori) módja az, hogy csak a diktátor véleménye számit, megköveteljük még a következő feltételt is:

5.) Az alkotmány nem-diktatórikus, azaz nincsen olyan x_o szavazó, hogy a $\leq_e$ végeredmény a szavazás bármely kimenete esetén éppen a $<_{x_o}$ szavazattal egyezik meg. Itt is hangsulyozzuk, hogy a feltevés amit tettünk, távolról sem a lehető legerősebb: szó sincs pl. arról, hogy az alkotmány minden szavazó véleményét figyelembe vegye, sőt egyenlő sullyal vegye figyelembe - a 'nem-diktatórikus' tehát definició szerint kevesebbet kiván meg, mint a 'demokratikus'.

Mint a fentiekből világos, legalább két szavazóra és két alternativ lehetőségre van szükség ahhoz, hogy a problémát érdemes legyen vizsgálni: először ezzel az esettel foglalkozunk. Legyen a két választó x és y, a három lehetőség pedig A, B, C. A kényelmesebb fogalmazás kedvéért változókat is bevezetünk: i és j a választók, U és V pedig a lehetőségek bármelyikét jelenti.

A követési feltételből következik, hogy $U <_x V$ és $U <_y V$ esetén $U <_\varrho V$ fennáll, és azt sejtjük, hogy $U <_x V$ és $U >_y V$ esetén a döntés szükségképpen $U =_\varrho V$. Ezt azonban az 1.)... 5.) feltételek (axiómáink) között nem kötöttük ki: elvileg előfordulhat, (és diktatórikus esetben elő is fordul), hogy pl. $A <_x B$, $A >_y B$, de $A <_\varrho B$, azaz a ϱ alkotmány x-nek kedvez az 'A vagy B' kérdésben. Mi több, ilyen esetben a 4.) feltétel (függetlenség) miatt kimondhatjuk, hogy

(1) $$A <_x B \wedge A >_y B \Rightarrow A <_\varrho B$$

(Az $\wedge$ 'és' és $\Rightarrow$ 'tehát' logikai konnektivumokat egyelőre csupán gyorsirásként használjuk) attól függetlenül, hogy x és y hogyan ~~kxxx~~ szavaztak C-vel kapcsolatban.

Folytassuk ennek az esetnek az elemzését! Tegyük fel, hogy $C <_x A <_x B$, és $B <_y C <_y A$. Tekintve, hogy mindkét szavazat szerint $C < A$, igy a követési tulajdonság miatt $C <_\varrho A$. Miután $A <_x B$ és $B <_y A$, (1) miatt $A <_\varrho B$. Mivel a $\leq_\varrho$ sem lehet önellentmondásos, szükségképpen $C <_\varrho B$. Mivel (függetlenség!) ez az eredmény nem függ attól, hogy x és y hogyan itélnek A-val kapcsolatban,

(2) $$C <_x B \wedge C >_y B \Rightarrow C <_\varrho B,$$ azaz az alkotmány a C és B közti döntésben is x-nek kedvez.

Hasonló módon, ha $C <_x B <_x A$ és $B <_y A <_y C$, akkor a követési tulajdonság miatt $B <_\varrho A$, és az előbb láttuk, (2), hogy $C <_x B$-ből $C <_\varrho B$ következik. E kettő együtt azt adja, hogy $C <_\varrho A$, azaz

(3) $C <_x A \wedge C >_y A \Rightarrow C <_\varrho A$, és ez ismét független a szavazatok egyéb vonásaitól.

Ha most a szavazatok $B <_x C <_x A$ illetve $A <_y B <_y C$, akkor a követési tulajdonság miatt $B <_\varrho C$, és előbb láttuk (3), hogy $C <_x A$-ből $C <_\varrho A$ következik. Ezeket összevetve

(4) $B <_x A \wedge B >_y A \Rightarrow B <_\varrho A$.

Hasonló módon a $B <_x A <_x C$ illetve $A <_y C <_y B$ szavazatokból (4) miatt $B <_\varrho A$, a követési tulajdonság miatt $A <_\varrho C$ adódik, tehát

(5) $B <_x C \wedge B >_y C \Rightarrow B <_\varrho C$,

végül $A <_x B <_x C$ illetve $C <_y A <_y B$ szavazatokból (5) miatt $B <_\varrho C$ és a követési tulajdonság miatt $A <_\varrho B$ adódik, tehát

(6) $A <_x C \wedge A >_y C \Rightarrow A <_\varrho C$.

Az (1)...(6) eredményeket az teszi meglepővé, hogy y ellenszavazatával együtt is érvényesek: összefoglalóan azt mutatják, hogy az adott esetben a $\leq_\varrho$ rendezést kizárólag a $<_x$ rendezés határozza meg, azaz x diktátor. Ha tehát nem kivánunk az 5.)-ös feltevéssel ellentmondásba kerülni, arra a következtetésre kell jutnunk, hogy kiindulópontunk hibás volt: nem fordulhat elő, hogy $A <_x B$ és $A >_y B$ esetén $A <_\varrho B$ álljon, azaz az alkotmány nem kedvezhet x-nek. Természetesen ennek az okoskodásnak a tükörképe* [A bizonyitásban szisztematikusan felcseréljük az x és y betüket.] azt is mutatja, hogy az alkotmány y-nak sem kedvezhet, igy $A <_x B$ és $A >_y B$ esetén kizárólag $A =_\varrho B$ állhat.

Könnyen látható az is, hogy A és B konkrét megválasztása sem játszik szerepet a bizonyitásban, igy általában is elmondhatjuk, hogy két választó, és három lehetőség esetén, az 1.)....5.) feltételeknek eleget tevő alkotmányra:

$$U <_x V \wedge U >_y V \Rightarrow U =_{\mathcal{C}} V.$$

Az iménti bizonyitásból úgy tünhet, hogy az 1.)...5.) feltételeknek eleget tevő alkotmányba a pártatlanság 'be van épitve': a legkisebb részrehajlás lavina szerüen diktátor megjelenéséhez vezet. Ezt a következetetést azonban teljes szigorusággal nem vonhatjuk le mindaddig, amig meg nem győződtünk arról, hogy az 1.)...5.) feltételeknek megfelelő alkotmány valóban létezik. Lehet, hogy mindez csupán akadékoskodásnak tünik, de próbáljuk meghatározni az alkotmány (szavazatkiértékelő berendezés) müködését a következő szavazatok esetén:

$$A <_x B <_x C \qquad C <_y A <_y B$$

Tekintve, hogy $B <_x C$, és $B >_y C$, előző eredményünk értelmében $B =_{\mathcal{C}} C$, és ugyanigy $C >_x A$ és $C <_y A$ miatt $C =_{\mathcal{C}} A$. Igy tehát a végeredmény eldöntetlen B és C, továbbá C és A között, tehát szükségképpen fennáll $A =_{\mathcal{C}} B$ is. A követési elvből azonban $A <_x B$ és $A <_y B$ miatt $A <_{\mathcal{C}} B$ következne, ez pedig ellentmond $A =_{\mathcal{C}} B$-nek. Ugy tünik tehát, hogy a 'részrehajlás diktaturát szül' tételről le kell mondanunk (megjegyezzük, hogy ez csupán a bizonyitás, és nem a tétel átfogalmazása volt), mivel a feltevések, amelyekre épitettük, igy együtt sosem teljesülhetnek.

Teljesen haszontalan volt-e az egész vizsgálat? Nem, mert kezünkben van az u.n. Arrow-féle lehetetlenségi tétel: Nem létezik olyan $\mathcal{C}$ alkotmány, amely az 1.)....5.) feltételek mindegyikének eleget tenne.

Szigoru értelemben persze azt kellene mondani, hogy két szavazó és három lehetőség mellett nem létezik a feltételeknek eleget tevő alkotmány, de világos, hogy ilyen alkotmány általában (tehát legalább két szavazó és legalább három lehetőség mellett) sem létezhet. (Ennek precíz igazolására, csakúgy mint a tétel által nyitva hagyott '(legalább) két választó, pontosan két lehetőség' eset vizsgálatára a gyakorlaton kerül sor.)

Figyeljük meg, hogy a lehetetlenségi tétel mennyivel többet mond a demokratikus véleményegyeztetés problematikájáról, mint az "egyéni érdek és a közérdek ellentmondásai" gyakran hajtogatott szlogenje. Egyrészt világos a tételből, hogy a probléma nem oldható meg a demokrácia szükitésével (ebben az 5.) feltevésssel, azaz csupán nem-diktatura megkövetelésével elmentünk a végső határig), másrészt az sem különösebben fontos, hogy a többségi elv milyen formáját tekintjük, hiszen a követési tulajdonság a többségi elv minden megfogalmazásából következik. Tekintve, hogy 2.) és 3.) alapjában technikai jellegü feltevések, amelyeket minden 'valamirevaló' alkotmánynak teljesitenie kell - a gyakorlatban nem is találunk olyan szavazatkiértékelési rendszert, amely nem teljesiti 1.), 2.) és 3.) mindegyikét - a probléma magja a 4.) feltevésben (függetlenség) rejlik.

Megfogalmazhatjuk tehát a lehetetlenségi tételt a következő módon is: a nemdiktatúrával járó szükséges rossz az, hogy a releváns kérdésekben hozott döntéseket az irreleváns kérdésekről vallott vélemények is befolyásolják.

Az ezáltal a jelenség által nyújtott mozgásteret a politikusok ki is használják: "én megszavazom a te törvényjavaslatodat, ha te is megszavazod az enyémet" - itt azonban nem mehetünk bele a kollektiv döntéshozatal részletesebb vizsgálatába. (Az érdeklődő olvasónak Gordon Tullock Problems in majority voting c. cikkét ajánljuk.)

Ha egy kicsit távolabbról vesszük szemügyre a fenti okfejtést, rögtön kitünik néhány olyan vonása amely nemcsupán elkülöníti a humán tudományokban alkalmazott érvelési módszertől, hanem (ugy véljük) sikereit is megmagyarázza. Az első ilyen vonás az, hogy a fenti okfejtés cáfolhatatlan: az adott feltevések mellett a lehetetlenségi tételt nem lehet megkerülni. Vitatható ugyan, hogy ezek a feltevések a valóságos döntés-összeegyeztetési eljárásokra (alkotmányokra) érvényesek-e, vagy hogy indokolt-e az "egyszerü szavazás" vizsgálatát sorbarendezések vizsgálatára kiterjeszteni, ez a vita azonban nem érinti a tétel lényegét, legfeljebb alkalmazhatóságát teszi kétessé. Maga a tétel azonban igaz: érvelésünket minden logikusan gondolkodó ember, ha egyszer megértette, kénytelen elfogadni. Itt jegyezzük meg, hogy ez az érvelés szóban elmondva gyakorlatilag áttekinthetelen: a formalizmus (a matematika 'gyorsirása') bevezetését azonban mint látni fogjuk nem ezek a praktikus szempontok indokolják elsősorban.

Mi teszi ezt a tételt és általában a matematikai igazságait cáfolhatatlanná? Vegyünk például egy olyan cáfolhatatlan fizikai igazságot, mint hogy "az elejtett kalapács leesik".

A: Az elejtett kalapács leesik.

B.: Mindig?

A.: Mindig.

B.: Szerintem nem: erős ventillátort teszek alá, a keltett légáram, mintegy légpárnaként fenntartja.

A.: Ilyen alapon egy széket is tehetnél alá - ez nyilván tilos.

B.: Rendben van,nem teszek alá semmit, mondjuk egy erős mágnest függesztek fölé.

A.: Világosabban kell fogalmaznom: az elejtett kalapács mindig leesik, ha külső hatásoktól el van zárva: mondjuk például egy légmentes és a mágneses teret leárnyékoló doboz belsejében.

B.: Na tessék, itt van az első "ha". Biztos hogy leesik?

A.: Biztos.

B.: Mi az hogy "le"?

A.: Jó hogy azt nem kérdeked, mi az a kalapács! A "le" erre van (lába elé mutat.)

B.: És mi van ha a dobozt a kalapáccsal Ausztráliába viszem? Akkor a kalapács felfelé esik?

A.: Rendben van, a kalapács a föld tömegközéppontja felés esik, remélem tudod az hol van.

B.: Igen. Nagyjából ott, ahol a föld geometriai középpontja van. Szóval a kalapács mindig arrafelé esik?

A.: Meg fogsz lepődni: igen.

B.: Akkor is, ha a Hold felszinétől 3 kilométerre engedem el? Én azt hittem, hogy akkor a Holdra esik.

A.: Nem fogalmaztam elég körültekintően: a kalapács, ha egyéb erők nem érik, a kivüle eső tárgyak távolságának arányában négyzetesen csökkentett sullyal kiszámitott sulypontja felé esik. Ha a Holdhoz vagy közel ez nagyjából a Hold középpontja, ha a Földhöz akkor a Földé, de ha akarod akkor a Napot is beszámithatod.

B.: Megkiméllek attól, hogy még a kalapács kezdősebességét is számitásbe kelljen venned, de enélkül is úgy tünik, hogy minél cáfolhatatlanabb akarsz lenni, annál bonyolultabb leszel.

A.: Hát ha csak ez a gondod, ezen igen egyszerü segiteni: vedd az általános tömegvonzás törvényét: $F=\gamma\frac{m_1m_2}{r^2}$ ebből már minden kiszámitható.

B.: Igen? Hogyan?

A.: Hát hogy a konstansokkal ne kelljen sokat vacakolni, legyen M_1 a Föld tömege r a Föld sugara, akkor a gyorsulás $\gamma\frac{m_1}{r^2}=9{,}81\frac{m}{s^2}$, ez a "gé" mint te is jól tudod.

B.: Ahá! Ef egyenlő emszer á! Nem kell ezt máshol is használni?

A.: Látom már, hogy hova akarsz kilukadni, úgyhogy eléd megyek: a gravitációs törvényből a Newton-axiómák (és persze a matematika szebályai) szerint az egyéb hatásoktól elzárt anyagi test - mit nekünk kalapács - gyorsulásának iránya és nagysága kiszámolható.

B.: És ez cáfolhatatlan? Mintha Einstein megcáfolta volna.

A.: Rendben, akkor számolj relativisztikusan.

B.: És a relativitáselmélet cáfolhatatlan?

A.: Az azért túlzás, de eddig mindenesetre nem cáfolták meg, és ami azt illeti, nem is valószinü, hogy egyhamar meg fogják.

B.: De azért elképzelhető, hogy holnap valami ravasz kisérlettel kimutatják, hogy azért ott sem stimmel minden, vagy nem?

A.: (vonakodva) De igen, elképzelhető.

B.: Hát akkor mégsem sikerült cáfolhatatlan állitást mondanod.

A.: Hohó, de még mennyire, hogy sikerült. Elfeledkeztél a kalapácsról! Ha a kalapácsra egyéb erő nem hat, és a relativitáselmélet igaz, akkor gyorsulása igy és igy kiszámitható (mellőzőm a részleteket). Nem tagadhatod, hogy ez igaz akkor is, ha a relativitáselmélet tévesnek bizonyul.

B.: Nem is tagadom. De mit szólsz a következőhöz? Ha a kalapácsra egyéb erő nem hat, és a Newton-axiómák igazak, akkor gyorsulása ugy és amúgy kiszámitható (kicsit egyszerübben mint az előbb). Ez is igaz?

A.: Tulajdonképpen ez is igaz, de én tudom, hogy a Newton-axiómák nem igazak.

B.: Én is tudom, de én a relativitáselméletben sem bizon annyira mint te. Számomra azonban a két állitás egyaránt cáfolhatatlan - bár az axiómák amiken nyugszanak, egyáltalána nem azok.

E képzelt párbeszéd (az érdeklődő olvasó számos hasonlót találhat Rényi (1966) és Lakatos (1981) müveiben) reméljük meggyőzte az olvasót, hogy minden állitás igazsága önmagában relativ, és cáfolhatatlanok csupán az ilyen állitásokat összekötő ha-akkor tipusu állitások között találunk.

Filozófusok régóta keresik az abszolut (cáfolhahatatlan) igazságot: ez a keresgélés legjobb tudomásunk szerint mindeddig eredménytelen maradt. A matematikusok ennél sokkal szerényebb célt tüztek maguk elé (ennek több mint kétezer éve: Euklidesz i.e. 300 körül alkotott) relativ igazságokat keresnek.

Egy matematikai tétel mindig csupán az axiómákhoz képest igaz: amennyiben az axiómák igazak (és ezt a matematikusok sosem állitják) a következtetés is igaz. Napjainra meglehetős egyetértés alakult ki a matematikusok között abban, hogy egy ilyen (cáfolhatatlanságra törő) érvelésben mik a megengedett eszközök. Bár erre a kérdésre a későbbiekben még visszatérünk, már itt megjegyezzük, hogy ezek az eszközök mind használatosak a hétköznapi 'korrekt érvelésben', és egyelőre még nem ismerünk olyan 'józa ésszel hibátlan' következtetési formát, amely ne lenne helyettesithető a matematikában bevett formális következtetéssel. Ilyen értelemben tehát a matematika nem több, mint a "józan ész"-szel való következtetés tudománya, a hétköznapi gondolkodástól csupán az különbözteti meg, hogy annál jóval szisztematikusabb.

Ha tehát a matematikát az előadás legelején adott definició értelmében problémák megoldására kivánjuk használni, ügyelnünk kell arra, hogy a tárgyalható problémák körét ne korlátozzuk akaratunkon kivül bizonyos, esetleg rejtett, feltevésekkel. A minimum amihez ragaszkodunk a következő: a matematika állitásokkal foglalkozik. Ezen belül a logika tárgyalja azt a kérdést, hogy adott igaz állitásokból (axiómákból vagy már bizonyitott tételekből) miképp juthatunk ujabb igaz állitásokhoz, a matematika egyéb ágai (pl. a geometria) konkrét axiómák és állitások vizsgálatával foglalkozik. Ebből a szemszögből a klasszikus fizika a matematika a Newton-axiómák vizsgálatával foglalkozó ágának tekinthető, amely (mint ilyen) nem vesztette el érvényességét annak ellenére, hogy ma már tudjuk az axiómákról, hogy nem fedik pontosan a valóságot - ez csupán a szóban forgó elmélet <u>közvetlen</u> felhasználhatóságát csökkenti.

Mik tehát azok az állitások, (és azok a következtetési sémák) amelyek matematikailag vizsgálhatók?

Ismét egy példával kezdünk: tekintsük a következő következtetést:

(7) A falu orvosa Péter $\wedge$ a falu orvosa részeges $\Rightarrow$ Péter részeges

A legtöbb ember úgy gondolja, hogy ez a következtetés hibátlan, és könnyen formalizálható a következő alakban:

(8) A falu orvosa = Péter $\wedge$ A falu orvosa = részeges $\Rightarrow$ Péter = részeges.

(Az egyenlőségjelnek megfelelő létige a magyarban nincs kitéve, de számos indoeurópai nyelvben megjelenik).

Azok akik már hallottak a (Newtontól származó) "ha két dolog egyenlő egy harmadikkal, akkor egyenlőek egymással is" logikai alapelvről, azok talán meg vannak győződve róla, hogy a (8) következtetés tulajdonképpen a következő általános séma

(9) $x=y \wedge x=z \Rightarrow y=z$

speciális esete x= a falu orvosa, y = Péter, z = részeges választás mellett. Tekintsük azonban a következő példát:

(10) A hőmérséklet 20 fok $\wedge$ A hőmérséklet emelkedik (Nyilván van olyan pillanat, amikor ez a két állitás egyszerre igaz) Ha az x = hőmérséklet, y = húsz fok, z = emelkedik választással élünk, akkor (9) alapján levonhatjuk a következtetést

(11) húsz fok emelkedik.

Húsz fok természetesen húsz fok marad bármelyik pillanatban, igy (11) hamis.

A példából kitünik, hogy nem tekinthetünk minden magyar nyelvü kijelentő mondatot állitásnak, a szó matematikai értelmében: éppúgy ahogy az előbb definiáltuk, hogy mit tekintünk "szavazatnak", most definiálnunk kell, hogy mit tekintünk állitásnak.

A formalizált matematikai nyelv tehát jóval több, mint egyszerü gyorsirás: ez teszi lehetővé, hogy a matematikában elszakadjunk a természetes nyelvet használó hétköznapi érvelésekben oly gyakran felbukkanó homályos, sőt időről-időre egyenesen inkorrekt okfejtési módtól.

Megjegyzés: E probléma fontosságát már Leibniz felismerte, azonban csak a huszadik század matematikai, logikai, és filozófiai kutatásai termtették meg az alapot a tudomány igényeinek megfelelő nyelv kidolgozásához. A neo-pozitivista filozófusok (Schlick, Hahn, Neurath), a lingvisztikai pozitivisták (Wittgenstein) és a logikai empiricisták (Carnap) munkájának hála, ma már meglehetősen világos kritériumaink vannak arra, hogy mi tekinthető szabatos érvelésnek, és a korszerü matematikai logika nyelvén ezek az érvelések kivétel nélkül formalizálhatók. E problémakör rendkivüli fontosságára való tekintettel ajánljuk, hogy ezek a kérdések legalábbis a proszemináriumon tárgyalásra kerüljenek.* [Tekintve, hogy olyan alapvető munkák, mint pl. Carnap: Logical syntax of language c. müvének ismertetése önmagában is legalább két félévet igényelne, úgy véljük, hogy e témakör kellő részletességgel történő tárgyalása csak a filozófia-oktatás kereteiben illetve speciálkollégium(ok)on képzelhető el.]

Az előadás hátralevő részében ismertetjük a matematika nyelvének az u.n. predikátumkalkulusnak a 'nyelvtani szabályait', nem foglalkozunk egyelőre azonban azzal a kérdéssel, hogy a predikátumkalkulus mondatai mit jelentenek. Programunk a következő lesz: megpróbáljuk izolálni azt a minimumot, amelyre egy valamennyire is kifejező nyelvben mindenképpen szükség van, és ebből az épitőanyagból felépitünk egy igen egyszerü nyelvet, az u.n. elsőrendü predikátumkalkulust. Ez a nyelv távolról sem lesz olyan hajlékony és kifejező mint pl. a magyar nyelv (nem tartalmaz indulatszavakat, sőt kérdéseket sem), de ezért bőségesen kárpótol minket világossága és egyértelmüsége. A későbbiekben látni fogjuk, hogy az elsőrendü predikátumkalkulus mint metanyelv segitségével a természetes nyelveket jóval pontosabban utánzó (pl. számitógépes) nyelvek, sőt bizonyos mértékig a természetes nyelvek is felépithetők lesznek. Erre a kérdésre azonban csupán a predikátumkalkulus megismerése után térünk majd vissza.

Az előadás első felében ismertetett Arrow-féle lehetetlenségi tétel jól illusztrálja a matematika tipikus eredményeit, és azt a módot, ahogy különböző problémákról értékes ismereteket nyerhetünk a szigoru gondolkodásmód módszeres alkalmazásával. Vegyük most ezt a példát egy kicsit távolabbról szemügyre, és nézzük meg, hogy mi mindenre van ahhoz szükség, hogy a fenti tételt egy formalizált nyelven tudjuk tárgyalni. Az első szembetünő tény az, hogy a probléma tartalmaz bizonyos fogalmakat (esetünkben 'szavazat', 'véleményösszeegyeztetési rendszer' stb.), amelyeket explikálnunk kell, már csak azért is, mert különböző emberek számára különböző dolgokat jelentenek.

A probléma tárgyalásának első lépése tehát szükségképpen a fogalmak definiálása, azaz visszavezetése olyan fogalmakra (esetünkben 'sorbaállitás', 'függvény'), amelyek mindenki számára ugyanazt jelentik. A matematika nem foglalkozik azzal a kérdéssel, hogy e visszavezetési folyamatot hol célszerü abbahagyni, azaz hogy mik a valódi alapfogalmak (ha ugyan vannak ilyenek). A visszavezetési folyamatban azonban előbb-utóbb megállunk (mert meg kell állnunk), és valamely fogalmakat alapfogalomnak tekintünk és nem definiálunk. A geometriában pl. ilyen a pont, az egyenes, a sik vagy a tér fogalma: ezeket nem kivánjuk még egyszerübb (világosabb, közérthetőbb, egyértelmübb) fogalmakra visszavezetni. A logikai nyelvnek tehát szükségképpen tartalmaznia kell az alapfogalmakat, pontosabban ezek neveit, melyeket konstansoknak hivunk.

A halmazelmélettel ismerős olvasót némileg meghökkentheti az a tény, hogy az előbbi (geometriai) példa konstansai nem 'egyenranguak'; hiszen az egyenesek pontok halmazai, és a térnek (és bizonyos sikoknak) részhalmazai. Ennél még sokkal zavaróbbnak tünhet az a felismerés, hogy egyes alapfogalmak (pl. párhuzamosság) nem is ponthalmazoknak, hanem ponthalmazok közti viszonyoknak felelnek meg. Mivel a probléma számos terminológiai zavart is kelt pontosabbá tesszük beszédmódunkat.

A logikai nyelvben szerepelnek individuális konstansok (ilyenek pl. a geometriában a pontok) másnévek individuumok, és szerepelnek relációs konstansok másnévek relációk. Az előadásban tárgyalt példánál maradva, individuális konstansok pl. az egyes választók és a választási lehetőségek (a logikai nyelv ezeket tehát homogén módon kezeli), és relációs konstansok az egyes szavazatok. Egy relációról természetesen tudnunk kell hogy hány változós: pl. a szavazatok S(x,A,B) három változós relációk (x szavazata szerint A jobb mint B), de ha rögzitünk egy bizonyos szavazót, akkor $<_{x_0}$ már természetesen csupán kétváltozós reláció.

Az individuum és reláció különbségét elmosó lazább beszédmódra az ad mégis alapot, hogy (mint látni fogjuk) az individuumok felfoghatók 0-változós relációként.

Megjegyzés: Bár a jelentéssel most nem foglalkozunk, már itt hangsulyozzuk, hogy a konstans nem tévesztendő össze sem az individuummal, sem a konstans függvényekkel. Igy például az analizis elméletében a 'sinus' konstans egy (nem állandó értékü) függvénynek felel meg.

Miután nemcsak egyes dolgokról kivánunk beszélni, hanem általános kijelentéseket is kivánunk tenni, szükségünk lesz a konstansokon kivül változókra vagy másnéven határozatlanokra is. A változók hasznossága már a lehetetlenségi tétel leirásánál kiderült: ezek jelentőségét illusztrálandó azonban még egy példát hozunk.

Tudjuk, hogy $\sin^2 10^o + \cos^2 10^o = 1$, $\sin^2 20^o + \cos^2 20^2 = 1$ stb. (A jelen példában 'sin' 'cos' individuális konstansok, csakúgy mint a számok és a fokok is, a + pedig 3 változós relációs konstans: +(x,y,z) akkor és csak akkor ha x+y=z). A fenti kifejezések ugyan mind igazak, de számunkra (ilyen egyedi szinten) nem ~~xxxxxxx~~ ezek érdekesek, hanem az általános törvény, hogy tudiillik $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ mindan x szögre igaz, kéxsőbb bevezetendő jelöléssel

$$\forall x \ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

A jelen előadásban ismertetésre kerülő u.n. elsőrendü predkátumkalkulusban csupán individuális változók vannak (tehát olyan változók, amelyeket individuális konstansokkal lehet helyettesitseni), a később ismertetésre kerülő u.n. magasabb rendü predikátumkalkulus azonban relációs változókat (határozatlanokat) is fog tartalmazni: más különbség e kalkulusok között nincs is.

Röviden összefoglaljuk tehát, hogy mik azok az épitőelemek, amiket a predikátumkalkulus tartalmaz:

1. Konstansok: a.) individuumok, jelük általában a,b,c...
   b.) relációk, jelük általában R, S, T ... pontosabban R(,) (kétváltozós) S(, , ,) (négyváltozós), T( ) (egyváltozós). A változók száma nyilván a zárójelek között szereplő vesszők száma plusz egy. A kétváltozós, háromváltozós, n változós szavak helyett használjuk a bináris, ternáris, n-áris kifejezéseket is.
2. Változók: a.) individuális változók, jelük általában x,y,z ....

b.) relációs változók, jelük általában
X, Y, Z, ... (csak a magasabbrendü predikátumkalkulusban szerepelnek)

3. Logikai jelek: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$, olv. 'és', 'vagy', 'nem', 'tehát', 'minden', 'létezik',

4. Zárójelek: ( )

Tekintve, hogy az elsőrendü predikátumkalkulusban minden változó individuális, nem kell külön tisztázni, hogy itt a változó mi felett fut: minden változó minden individuális konstanst fel vehet értékként.(De nyilván nem vehet fel relációs konstanst vagy más változót.)

Nem teszünk semmiféle további kikötést a ~~kaxákbxxk~~ konstansokra (az hogy ezeket milyen tipusu betükkel jelöljük, csupán kényelmi szempont) ezzel szemben megkötjük, hogy csupán megszámlálható sok változónk legyen: ezt ugy is mondhatnánk, hogy mindössze az x_1, x_2, x_3, ... változók állnak rendelkezésünkre.(A gyakorlatban legtöbbször véges sok változó is elegendő.)

Megjegyzés: Az individuumok durván a természetes nyelvek főneveinek felelnek meg, éspedig a konstansok a tulajdonneveknek és az individuális váltzók a közneveknek. Igy tehát durván azt mondhatjuk, hogy 'akadémia' olyan változó, amely befutja a világ összes tudományos és müvészeti akadémiáját és 'Magyar Tudományos Akadémia' ennek egy lehetséges (konstans) értéke.

A magyar nyelv bizonyos értelemben érzékeny a konstans és a változó közti különbségre:

megalapitok egy akadémiát

megalapitom az Akadémiát

Hangsulyozzuk azonban, hogy az alanyi és tárgyas ragozás különbsége nem használható teljes biztonsággal a konstans ill. változó értékü főnév (pontosabban főnévi csoport) megkülönböztetésére: pl. a 'Vietnami Tudományos Akadémia' kifejezés változó volt 1980 előtt (lehetséges értékei észak-vietnami ... ill. dél-vietnami ...), de Vietnam egyesitése óta konstansnak tekinthető. Épp forditott a helyzet a 'német tudományos akadémia' esetében: látható tehát, hogy a kérdés eldöntéséhez a magyar nyelvtan szabályai nem minden konkrét esetben szolgáltatnak elegendő támpontot.

A fenti épitőelemek megadásával még ugyanugy nem irtuk le az elsőrendü predikátumkalkulust, mint ahogy egy angol szótár sem elégséges angol nyelvü mondatok megalkotására: ehhez még ismernünk kell a nyelvtan szabályait, másszóval szintaxisát is. (Itt és a továbbiakban szintaxison olyan véges szabályrendszert értünk, amely alapján minden jelsorozatról egyértelmüen eldönthető, hogy az adott nyelven jól formált-e vagy sem.)

Esetünkben a szintaxis igen egyszerü. Első lépésben definiáljuk az u.n. atomi formulákat: ezeket a relációs konstansokból nyerjük úgy, hogy a bennük szereplő üres helyekre individuális konstansokat vagy (individuális) változókat irunk. Igy tehát

$R(x,y)$, $S(x,a,b)$, $T(w)$ atomi formulák, de

$R(x,)$, $R(S(t))$, $R(x,y,Q)$ nem azok.

Jelöljük az atomi formulák osztályát $\mathcal{A}$ -val.

Az elsőrendü predikátumkalkulus jól formált formuláit (tehát azokat, amik megfelelnek a predikátumkalkulus nyelvtani szabályainak) a következőképpen nyerhetjük:

1.) Ha X atomi formula, akkor (X) jól formált formula

2.) Ha x és y jól formált formulák, akkor $(\neg x)$, $(x \wedge y)$, $(x \vee y)$ és $(x \Rightarrow y)$ is azok. (A zárójelekre azért van szükség, hogy pl. $((\neg x) \wedge y)$-t meg tudjuk különböztetni $(\neg (x \wedge y))$-tól.)

3.) Ha x tetszőleges (individuális) változó és F olyan formula, amely nem tartalmazza a $\forall x$ ill. $\exists x$ szimbólumsorozatok egyikét sem, akkor $(\forall x F)$ és $(\exists x F)$ is jól formált formulák.

Mint látható az elsőrendü predikátumkalkulus szintaxisa igen egyszerü: nem nehéz olyan algoritmust (mechanikus eljárást) megadni, amely tetszőleges jelsorozatról eldönti, hogy előállitható e az adott szabályrendszer segitségével. Egy ilyesfajta algoritmus a következőképpen müködhet:

a.) Leellenőrizzük hogy a jelsorozat tartalmaz-e más szimbólumot, mint $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \forall, \exists,), ($ illetve változókat és konstansokat. Ha igen, akkor eleve nem lehet jól formált formula (jff).

b.) Ha az adott jelsorozat nem tartalmaz logikai jelet, akkor csupán azt kell leellenőrizni, hogy (X) alaku-e, ahol X atomi formula. Ha nyitózárójellel kezdődik, ezt n-változós relációjel l követi, melynek mindegyik (individuális) helye konstanssal vagy változóval van kitöltve, végül zárózárójellel végződik, akkor a válasz igen, különben nem.

c.) Ha az adott jelsorozat tartalmaz logikai jelet, akkor a formula elemzésében zárójelről zárójelre haladunk be-felé: ennek az eljárásnak a részletes kidolgozását az olvasóra bizzuk.

Megjegyzés: A természetes nyelvek szintaxisa összehasonlithatatlanul bonyolultabb: a fent vázolt algoritmushoz hasonlót pl. magyar nyelvre csupán több száz (esetleg több ezer) oldalon lehetne leirni. Igen valószinü azonban, hogy ilyesfajta algoritmus előbb-utóbb kidolgozható lesz, hiszen az anyanyelvi beszélő (több-kevesebb biztonsággal) minden jelsorozatról meg tudja mondani, hogy az magyar nyelven jól formált mondat-e vagy sem. Az u.n. generativ nyelvészet éppen ilyesfajta algoritmusok kidolgozását tekinti egyik céljának.

A predikátumkalkulus szintaxisának egyszerüsége többek között annak köszönhető, hogy csupán azokat a dolgokat vesszük be ebbe a nyelvbe, amiket múlhatatlanul szükségesnek itéltünk. Ahogyan az individumokat főneveknek, a relációkat (durván) mellékneveknek feleltethetjük meg: ezt mutatja az is, hogy a legtöbb reláció neve a természetes nyelvben (középfoku) melléknévként viselkedik.

Emiatt csak igen kevés, a hétköznapi értelemben vett kijelentés fordítható le egy az egyben a matematika nyelvére, és ennek köszönhető például a "húsz fok emelkedik" paradoxona is. Létezik a nyelvészetnek olyan ága (az u.n. Montague-grammatika), amely az ilyesfajta fordítás szabályainak vizsgálatát tüzte maga elé, erre azonban most még nem térhetünk ki, annál is kevésbé, mert ez az irányzat a predikátumkalkulusnál jóval bonyolultabb logikai nyelvet, az u.n. intenzionális logika nyelvét használja.

Annak ellenére, hogy a matematika nyelve igencsak szegényes a természetes nyelvekhez képest (az igék szinte teljes hiánya különösen kellemetlennek tünhet) látni fogjuk, hogy ez a nyelv kiválóan alkalmas az élet legkülönbözőbb területeiről vett problémák tárgyalására - később még kitérünk arra, hogy ennek mi is az oka. Már itt hangsulyozzuk azonban, hogy a matematika sikereihez nagyban hozzájárul éppen az a tény, hogy a rendelkezésre álló kifejezési eszközök köre előre adott. Ez ugyanis az alkalmazót arra kényszeriti, hogy világosan átgondolja, hogy mik azok a fogalmak amiket használ, ezek között milyen kapcsolatok vannak ill. lehetnek, tehát mi az ami a problémából lényeges és mi az ami esetleges.

2. Előadás: A halmazelmélet mint a matematika ontológiája

Az első előadáson ismertettük a matematika nyelvét, az u.n. predikátumkalkulust. Ez a nyelv azonban nem önmagáért van: azért vezettük be, mert a szabatos nyelvezet lehetővé teszi, hogy kikerüljük a hétköznapi nyelvhasználat számos buktatóját. Ha egy problémával matematikailag próbáljuk foglalkozni, első teendőnk az kell legyen, hogy meghatározzuk a probléma felirásához szükséges alapfogalmakat: éppen ezek lesznek a matematikai elmélet konstansai. A problémát azonban az alapfogalmak még nem csupán a köztük mindenképpen fennálló összefüggések határozzák meg:

ez utóbbiak lesznek az axiómák.

Egy predikátumkalkulusban felirt elméletről tehát akkor beszélhetünk, ha megadjuk, hogy mik az elmélet konstansai (alapfogalmai) és hogy milyen jól formált formulákat tekintünk magától értetődően igaznak (axiómák).

Hangsulyozzuk, hogy egy jff önmagában sosem igaz: a matematika csupán arra képes, hogy megmondja, hogy ha egyes jff-ek igazak, akkor mások is szükségképpen azok, mivel következnek az előzőből. (Ez nem vonatkozik az olyan formulákra, amelyek pusztán belső szerkezetük alapján igazak (pl. $a \wedge \neg a$), ezekkel az u.n. tautológiákkal a 7. előadáson foglalkozunk részletesen.) Egy ilyen következtetés pl. a következő: ha tudjuk, hogy az X és Y jff-ek igazak, akkor szükségképpen igaz az $(X \wedge Y)$ jff továbbá az $(X \vee Y)$ jff is. Ez a következtetés meglehetősen nyilvánvaló és igy van ez a matematika minden következtetési szabályával. A hétköznapi józan okfejtéstől talán csak a szisztematikusság különbözteti meg a matematikai okfejtést: nem egy tétel bizonyitásához több ezer sőt több tizezer logikai lépésre van szükség. Ilyen hosszuságú okfejtések végiggondolásában sokat segit az, hogy a matematikában minden egyes lépésről mechanikusan ellenőrizhető, hogy helyes-e: ennek pontos kritériumait azonban csak később fogjuk megadni. Egyelőre elégedjünk meg annyival, hogy azzal a következtetéssel amiről józan ésszel látszik, hogy baj van vele, matematikailag is baj lesz, és az a következtetés, ami józan ésszel hibátlannak tünik, igen nagy valószinüséggel matematikailag is helyesnek bizonyul, legalábbis akkor, ha nem sajnáljuk a fáradságot arra, hogy a nyilvánvaló dolgokat (ilyen volt az előző előadásban pl. az u.n. monotonitási feltétel) is axiómaként kimondjuk.

Megjegyzés: Az a tény, hogy a matematikai következtetések mechanikusan is ellenőrizhetőek, néha meglepő következményekkel jár. Talán mindenki hallott már a hires négyszinsejtésről, ami azt mondja ki, hogy minden térkép kiszinezhető négy szinnel úgy, hogy két szomszédos ország soha ne kapja ugyanazt a szint. (Feltesszük, hogy egy csúcsban legfeljebb 3 ország találkozik). Ezt az egyszerü állitást több mint száz éve próbálták bebizonyitani vagy megcáfolni, de sem bizonyitást, sem ellenpéldát nem sikerült találni 1980-ig. A nagysebességü számitógépek megjelentése (és persze a témával foglalkozó u.n. gráfelmélet óriási fejlődése) azonban 1980-ra lehetővé tette, hogy a sejtés bizonyitását mechanikus úton számitógéppel keressék és találják meg: a négyszintétel a matematika első (de minden bizonnyal nem utolsó) olyan tétele, amelynek bizonyitása kihasználja azt a tényt, hogy a logikus gondolkodás, a logika fejlődésének hála, ma már mechanikusan ellenőrizhető folyamat.

A mai előadásban a matematikai gondolkodást nem kisebb problémára, mint a létezés problémájára alkalmazzuk: megteremtjük a létező dolgok matematikai elméletét. Már a görög filozófusok is tudták, hogy csak olyan dolgokkal érdemes foglalkozni, amik léteznek, vagy legalábbis létezhetnek* [A modern fizika gyakran hangoztatott álláspontja hogy minden amiről egyáltalán lehetséges, hogy bekövetkezzen előbb-utóbb be is következik, és minden ami létezhet, létezik is (ill. létezett vagy létezni fog). Számunkra most ez a kérdés nem különösen fontos: olyan matematikai elméletet teremtünk, amely ebben a kérdésben nem foglal állást (erre nézve nem tartalmaz axiómát).] és olyan dolgokra, mint például a nőnemü férfiak, nem érdemes sok szót vesztegetni, mert egyetlen ellentmondásból már minden (és mindennek az ellenkezője) bebizonyitható. Ezt az állítást később pontosabban is kimondjuk (és bebizonyitjuk), most elégedjünk meg egy példával.

Tegyük fel, hogy 0=1, bebizonyitjuk hogy 23=37.

o=1 /szorozzuk megy mindkét oldalt 14-el

0=14 /adjunk mindkét oldalhoz 23-at

23=37 /márpedig végig csupán ugynevezett azonos átalakításokat végeztünk, amelyekről általánosságban bebizonyitható, hogy érvényes egyenlőségből érvényes egyenlőséget hoznak létre.

Mik tehát a létező dolgok? Ezt persze nem tudjuk, de gondoskodni fogunk róla, hogy minden ami létezik, egyben halmazként is létezzen. Igy indult el Cantor (naiv)halmaz elmélete is: mi gyakran beszélünk pll az emberek (vagy országok , stb.) halmazáról. Az ember azonban maga is halmaz, tudniillik sejtek halmaza, és minden sejt fehérjemolekulák halmaza. Egy fehérjemolekula is felfogható halmazként: ennek elemei az atomok. Az atomokat elemi részecskék halmazainak tekinthetjük, az elemi részecskéket pedig kvarkok halmazainak. A matematikusok feltételezik, hogy ez a folyamat valahol megáll (ez az u.n. fundáltsági axióma, amelyről bővebben csak a negyedik előadásban lesz szó) mégha ez a gyakorlatban nem is teljesül (bár nehéz ezt elképzelni) akkor is világos, hogy minden konkrét elméletnek érdemes valahol megállnia: a szociológus számára a legkisebb egység az ember, az orvos számára a sejt, a biológus számára a fehérjemolekula, a vegyész számára az atom, a fizikus számára pedig a kvark.

Ebből a példából is világos, hogy minden halmaznak az elemei is halmazok, és minden halmaz eleme lehet egy másik halmaznak. Ezzel már meg is tettük az első lépést az axiómatikus halmazelmélet megalkotása felé: világos, hogy 'halmaz' és 'eleme' alapfogalmak, és más alapfogalomra lényegében nem is lesz szükségünk. Igy tehát a halmazelmélet nyelvében minden individuális konstans egy halmazt jelöl (és mivel rengeteg halmaz van, rengeteg ilyen konstansra van szükségünk, ezek száma magában a halmazelméletben ki sem fejezhető).

A továbbiakban tehát a, b, c, ... konkrét halmazok, x, y, z, ... változók ezek felett. Mindössze két relációs konstansra van szükségünk: az 'eleme' reláció és az 'egyenlő' reláció nevére (kényelmi okokból $\in(x,y)$ helyett $x \in y$-t, és $=(x,y)$ helyett $x=y$-t fogunk irni).

Amit eddig megadtunk, az persze nem a halmazelmélet, csupán annak nyelve. A halmazelmélet e nyelvből úgy keletkezik, hogy e nyelv bizonyos jól formált formuláit axiómáknak (azaz automatikusan igaznak) tekintjük. A most ismertetésre kerülő axiómák eredetileg Zermelo-tól származnak és Fraenkel volt az aki ezeket lényegében mai formájukra hozta (1908-1922).

[ZF 1] $(\forall x(x=x))$ 'minden halmaz azonos önmagával'

[ZF 2] $(\forall x(\forall y((x=y)\Rightarrow(y=x))))$ 'ha egy halmaz azonos egy másikkal, akkor a másik halmaz is azonos az elsővel'.

Ez az axióma természetesen éppúgy magától értetődő, mint az előző, de azért ki kell mondanunk; figyeljük meg, hogy pl. az 'eleme' reláció nem örvend ennek a tulajdonságnak: ha $x \in y$, akkor $y \in x$ sosem igaz. A továbbiakban, a könnyebb olvashatóság kedvéért a redundáns zárójeleket elhagyjuk: [ZF 2]-t pl. röviden igy irjuk le: $\forall x \forall y \quad x=y \Rightarrow y=x$.

[ZF 3] $\forall x \forall y \forall z \ (x=y \wedge y=z) \Rightarrow x=z$. 'ha két halmaz azonos egy harmadikkal, akkor azonosak egymással is'.

[ZF 1], [ZF 2], [ZF 3] együtt az egyenlőség alapvető tulajdonságait fejezik ki: később bevezetendő terminológiával ugy is mondhatnánk, hogy '=' ekvivalenciareláció.

[ZF 4] $(x=y) \Rightarrow \forall z((z \in x \Leftrightarrow z \in y) \wedge (x \in z \Leftrightarrow y \in z))$

'Egyenlő halmazoknak ugyanazok az elemei, és ők ugyanazoknak a halmazoknak az elemei.' (Itt $p \Leftrightarrow q$ (olv.'akkor és csak akkor') a $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ kifejezés rövidítése.

[ZF 5] $\forall x \forall y((\forall z \quad z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x=y)$

Ez az u.n. extenzionalitási axióma azt mondja ki, hogy két halmaz azonos, ha az elemei azonosak. (A forditott állitást [ZF 4] mondta ki). Felhivjuk a figyelmet ennek egy fontos következményére, hogy t.i. halmazokban nem engedünk meg többszörös elemeket, vagy ha úgy tetszik, pl. $\{a,b,a\} = \{a,b\}$ mivel nincs olyan elem, amivel meg tundnánk különböztetni őket, hiszen mindkét halmaznak pontosan a és b az elemei.

A tartalmazási reláció (jele '$\subset$') nem alapfogalom: ezt az alapfogalmak segitségével definiálni tudjuk.

Definició: $\forall x \ \forall y \ (x \subset y \Leftrightarrow (\forall z(z \in x \Rightarrow z \in y)))$

Az eddigi axiómák segitségével már be tudjuk bizonyitani, hogy az igy definiált tartalmazási reláció valóban bir azokkal a tulajdonásgokkal, amiket elvárunk tőle.

1) $\forall x \; x \subset x$ 2) $\forall x \forall y \; (x \subset y \wedge y \subset x) \Rightarrow x=y$

3) $\forall x \forall y \forall z \; (x \subset y \wedge y \subset z) \Rightarrow x \subset z$

azaz (később definiálandó terminológiával) $\subset$ valóban részbenrendezési reláció.

Lássuk be pl. a 2) tulajdonságot (ezt úgy nevezzük, hogy antiszimmetrikus)

Tekintsünk tetszőleges x és y halmazokat, amikre a premissza teljesül, azaz $x \subset y \wedge y \subset x$.

"A fogalmat helyettesitjük annak definiciójával"(Descartes)

(1) $\forall z \; z \in x \Rightarrow z \in y \wedge \forall w \; w \in y \Rightarrow w \in x$

(Figyeljünk fel rá, hogy a 'kvantált' változót szisztematikusan kicserélhetjük már nevü változóra, hiszen mindkettő ugyanazokat az értékeket veheti fel).

Tekintsünk tetszőleges a halmazt: erre a következő lehetőségek állnak: $a \in x$ vagy $a \notin x$.

Ha $a \in x$, akkor (1) baloldala miatt $a \in y$, és ha $a \notin x$ akkor $a \in y$ sem állhat, hiszen ebből (1) jobboldalan miatt $a \in x$ következne, ami ellentmondás.

Igy tehát a egyszerre eleme vagy nem eleme x-nek és y-nak, és mivel ez a bizonyitás tetszőleges a-ra elmondható, kijelenthetjük , hogy

$\forall z \; z \in x \Leftrightarrow z \in y$, és ebből [ZF 5] miatt x=y következik, q.e.d.

Igaz ugyan, hogy az eddigi axiómák kivétel nélkül teljesülnek, ha a halmazokra mint a fizikai világ tárgyaira (pl. mint kvarkok halmazaira) alkalmazzuk őket, mi azonban ezzel nem elégedünk meg; kimondunk egy olyan axiómát, amely matematikailag is biztositja halmaz létezését.

[ZF 7] $\exists x \forall z \quad z \notin x$ 'van olyan halmaz, aminek nincsenek elemei'.

Lehetséges hogy több ilyen halmaz is van? Legyenek x és y ilyan halmazok, ezekre $\forall z \quad z \notin x \wedge z \notin y$, igy tehát $\forall z \quad z \in x \Leftrightarrow z \in y$ (t.i. soha)
[ZF 5] miatt tehát x=y, azaz a [ZF 7] által biztositott halmaz egyértelmüen meg van határozva. Ezt a halmazt a továbbiakban <u>üres halmaznak</u> nevezzük, és $\emptyset$-val jelöljük. Egyelőre semmilyen más halmaz létezéséről nincs tudomásunk, de ha lenne is, akkor sem tudnánk velük mit kezdeni.

A most következő három axióma mindkét problémán segit: ezeknek a segitségével már ismert (tehát létező!) halmazokból uj halmazokat állithatunk elő, és definiálni tudjuk a halmazelmélet szokásos müveleteit is.
[ZF 8] $\forall x \forall y \exists z \forall w \quad w \in z \Leftrightarrow (w=x \vee w=y)$ 'Minden két halmazból elő tudjuk állitani azt a halmazt, amelynek pontosan ez a két halmaz az összes eleme. Magyarán szólva, ez az u.n. <u>páraxióma</u> arról biztosit minket, hogy az a és b halmazokból elő tudjuk állitani a $\{a,b\}$ halmazt (u.n. rendezetlen pontpárt) tetszőleges a-ra és b-re. Ennek az axiómának fontos következménye, hogy a-ból mindig elő tudjuk állatani a $\{a\}$ halmazt, hiszen a páraxióma biztositja $\{a,a\}$ létezését, és ez egy korábbi megjegyzésünk értelmében azonos $\{a\}$ -val. Igy tehát az üres halmazon kivül most már tudjuk, hogy létezik $\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}, \emptyset\}\}$ és számtalan egyéb hasonló módon felépithető halmaz is. Később látni fogjuk, hogy ezek a halmazok igen csak hasznosak annak ellenére, hogy "a semmit ragozzák".

A naiv halmazelméletben általában két (vagy több) halmaz egyesitéséről beszélünk: mi most definiáljuk egyetlen halmaz egyesitését is. Ez persze csak akkor lehetséges, ha az eredeti halmaz elemei maguk is halmazok, de mint már hangsulyoztuk ez a feltétel mindig teljesül.

[ZF 9] $\forall x \exists y (\forall z \quad z \in y \Leftrightarrow (\exists w \quad w \in x \wedge z \in w))$

Ezt a halmazt (amelyről könnyen látható, hogy egyértelmüen meg van határozva) az x halmaz egyesitésének nevezzük, és $\bigcup x$ -szel jelöljük: elemei pontosan azok a halmazok, amelyek (elemként) benne vannak x valamelyik elemében.

Ezt az u.n. egyesitési axiómát a páraxiómával kombinálva már értelmezhetük két halmaznak a hagyományos értelemben vett unióját is: ha adott két halmaz a és b, akkor [ZF 8] értelmében elkészithető $\{a,b\}$, és [ZF 9] szerint $\bigcup\{a,b\}$ is értelmes - jelöljük ezt c-vel. Mik c elemei - értelemszerüen azok a halmazok, amelyek vagy a-nak vagy b-nek elemei (hisz az axiómában szereplő w esetünkben a vagy b lehet), igy $c = a \cup b$, ahol $z \in a \cup b \Leftrightarrow z \in a \vee z \in b$, azaz joggal használhatjuk ezentúl a kényelmesebb $a \cup b$ jelölést $\bigcup\{a,b\}$ helyett.

Még két ilyesfajta "konstrukciós axiómát" fogunk felvenni, ezek közül az egyik, az u.n. hatványhalmaz axióma meglehetősen egyszerü, a másik, az u.n. kiválasztási axióma azonban majd csak akkor kerül sorra, ha a többi axiómával definiált halmazelméletben már bevezettük azokat a rövidités konvenciókat, amelyek segitségével ez majd kényelmesen tárgyalható lesz. Ilyen rövidités konvenció volt pl. $a \cup b$ $\bigcup\{a,b\}$ helyett, vagy akár $a \subset b$ $\forall z \quad z \subset a \Rightarrow$ $\Rightarrow z \subset b$ helyett, és hogy még több ilyenre lesz szükségünk, azt jól mutatja az, hogy a szokásos metszet, komplementum, stb. müveleteket sem tudtuk eddig bevezetni.

A most következő u.n. hatványhalmaz axióma lesz az, ahol a 'tárgy' (kvarkhalmaz) fogalma végképp elválik a matematikai halmaz-fogalomtól: a hétköznapi életben ugyanis nem szoktunk egy tárgy részhalmazainak halmazáról mint tárgyról beszélni.

[ZF 10] $\forall x \exists y \forall z \quad z \in y \Leftrightarrow z \subset x$.

(A nagyobb kényelem és a könnyebb érthetőség kedvéért itt már az axiómában szerepeltetjük a tartalmazás jelét: semmi akadálya azonban, hogy ezt a jelet annak definiciójával helyettesitsük, és azáltal megmaradjunk az előadás elején ismertetett nyelv keretei között.)

Az axióma által biztositott y halmaz ismét egyértelmü (ha x helyére rögzitett 'a' halmazt teszünk) ezt a halmazt a továbbiakban az a halmaz hatványhalmazának nevezzük és $\mathcal{P}(a)$-val jelöljük.

Az üres halmazból [ZF 8] és [ZF 9] segitségével változatos külsejü halmazokat állithatunk elő: ezek a halmazok azonban mind végesek, mivel mind a páraxiómát, mind az egyesitési axiómát csupán véges sokszor alkalmazhattuk ebben a folyamatban. Ha megelégednénk a véges halmazokkal, akkor [ZF 10]-re nem is lenne szükség, mivel véges halmaz hatványhalmazának létezését már e két axióma is biztositja, hiszen véges halmaz hatványhalmaza is véges (bár jóval nagyobb az eredetinél).

Lássuk ezt például $\{a,b\}$ -re: ennek hatványhalmaza nyilván $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ (hangsulyozzuk, hogy a hatványhalmaz elemei nem az eredeti halmaz elemei, hanem azokból képzett halmazok, igy $a \notin \mathcal{P}(\{a,b\})$, de $\{a\} \in \mathcal{P}(\{a,b\})$). Lépésről lépésre haladunk: ha a és b adottak, akkor adott $\{a,b\}$ is [ZF 8], és persze adott $\emptyset$ is [ZF 7]. Ezekből elkészithetjük (ismét a páraxióma segitségével) $\{\{a,b\},\emptyset\}$-t is. Ha adott a és b, akkor elkészithető $\{a\}$ és $\{b\}$ is (ld. a páraxióma után tett megjegyzésünket) és persze ismét elkészithető $\{\{a\},\{b\}\}$. Ezt az előbb elkészitett halmazzal (két lépésben) összeuniózva nyerjük $\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$-t és erről könnyen igazolhatjuk, hogy eleget tesz a hatványhalmazra kirótt feltételnek. Hasonló (bár jóval hosszadalmasabb) bizonyítás készithető $\{a,b,c\}$ esetén is, és általában tetszőleges véges halmazra is. (Hogyan?)

Teljesen világos, hogy az eddigi axiómák segitségével képtelenek vagyunk kikerülni a véges halmazok közül, sőt úgy tünhet, hogy a véges halmazok sincsenek még mind a kezünkben. (Ez utóbbi tévedés: látni fogjuk, hogy minden véges halmaz 'kikeverhető' az üres halmazból a konstrukciós axiómák segitségével).

Mindenképpen szükségünk lesz azonban végtelen halmazokra is: ilyenek létezését biztositja

[ZF 11] $\exists x: \emptyset \in x \wedge \forall y \; y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x$

Ez az u.n. végtelen halmaz axióma nyilván eléri célját, hiszen azt mondja ki, hogy van olyan halmaz, amely nem üres (hiszen $\emptyset$ eleme!) és ezenkivül minden eleménél van még bővebb elem is benne. ($y \cup \{y\}$ -t y rákövetkezőjének nevezzük).

Az eddigi létezést biztositó axiómákkal szemben [ZF 12] nem határozza meg egyértelmüen tárgyát: meglehetősen sok, a fenti kikötésnek eleget tevő halmaz van.

A figyelmes olvasónak feltünhetett, hogy a számozásban két luk is van: ezek közül [ZF 11]-et, az u.n. kiválasztási axiómát csupán kényelmi okokból halasztottuk későbbre, [ZF 7] azonban annyira elüt a többi axiómától, mind eszközeit, mind célját tekintve, hogy külön kell beszélnünk róla.

Az előző gyakorlat tapasztalatai alapján világos, hogy a logikai nyelv formulái közül csak a zártak tekinthetők teljesértékü kijelentésnek: azoknak a formuláknak, amelyek szabad (tehát semmelyik kvantor hatókörébe nem eső) változót tartalmaznak, tulajdonképpen logikai függvénynek felelnek meg, hiszen igazságértékük attól függ(het) hogy milyen konstanst helyettesitünk a változók helyébe.

Egyszerüségüknél fogva ezek között kitüntetett szerepet játszanak az elsőrendü predikátumkalkulus azon formulái, amelyek csupán egy szabad változót (mondjuk x-et) tartalmaznak: ezk ugyanis tulajdonságnak (melléknévnek) foghatók fel. Igy pl. $x<3$ az aritmetika egyik mellékneve: egy konstansnak pontosan akkor áll ez a tulajdonság, ha kisebb 3-nál. Vannak (lehetnek) olyan konstansok, melyek helyettesitése mellett egy bizonyos formula igaz lesz (más helyettesitésekre pedig hamis). Az előbbi konstansokat úgy hivjuk, hogy a formula által kifejezett tulajdonság <u>terjedelme</u>: [ZF 7] azt fogja garantálni, hogy ez a terjedelem bizonyos feltételek mellett halmaz.

Ha tehát $\phi(x)$ az elsőrendü predikátukalkulus olyan formulája, amelyben x szabad változó, és x helyére tetszőleges c konstanst irva $\phi(c)$ zárt formula lesz (azaz x-en kivül nincs több szabad változó ϕ-ben), akkor jó esetben beszélhetünk azon konstansok halmazáról, amelyre nézve ϕ teljesül és ezt nevezhetnénk ϕ terjedelmének. Kimondható lenne tehát a következő axióma:

*[ZF 6] $\forall\ \phi(x)$ csupán x-ben nyitott formulára $\exists y$, hogy

$$a \in y \Leftrightarrow \phi(a) \text{ igaz.}$$

(Figyeljük meg, hogy ez az axióma nem a predikátumkalkulus nyelvén lett kimondva, csupán felhasználja ezt a nyelvet).

Egy ilyen axiómának meg lenne az az előnye, hogy a halmazelméletet egyszer s mindenkorra egyesitené s logikával, hiszen minden forumla meghatározna egy halmazt, és persze eddig is minden ismert halmaz meghatározott egy formulát. Sajnálatos módon a dolgok nem ilyen egyszerüek: nem minden formulának tudunk halmazt megfeleltetni.

Legyen pl. $\phi(x)$ a következő: $x \notin x$. Ez a formula megfelel az elsőrendü predikátumkalkulus szabályainak, és kétségkivül vannak olyan halmazok, amik kielégitik pl. $\emptyset \notin \emptyset$ [ZF 7] miatt feltétlenül igaz. Készitsük el *[ZF 6] segitségével e tulajdonság terjedelmét, y-t.

$x \in y \Leftrightarrow x \notin x$, más jelöléssel $y = \{x \mid x \notin x\}$.

Micsoda ebben az esetben $\phi(y)$ igazságértéke? Ha $y \in y$, akkor y-ra $\phi(y)$ hamis, igy definició szerint $y \notin y$. Ha pedig $y \notin y$ akkor $\phi(y)$ igaz, igy ismét definició szerint $y \in y$. Ez az ugynevezett "borbélyparadoxon" késztette a matematikusokat arra, hogy *[ZF 6] helyett egy némivel óvatosabb axiómát vegyenek fel:

[ZF 6] $\forall\, \phi(x)$ formulára $\forall\, y$ halmazra $\exists\, z$ halmaz, hogy $\forall x (x \in y \Leftrightarrow (x \in z \wedge \phi(x)))$

Ezt a halmazt nyugodtan nevezhetjük a ϕ tulajdonság terjedelmének az y halmazon: z-ben y-nak pontosan azok az elemei vannak benne, amikre ϕ fennáll.

Ennek a halmaznak a jelölésére a tovabbiakban a $\{x \mid \phi(x) \ , \ (x \in y)\}$ jelölést alkalmazzuk, de az alaphalmazt csak akkor tüntetjük fel, ha hiánya félreértésekre vezethet.

[ZF 6] is eléri azt a célt, hogy egyesiti a logikát a halmazelmélettel, hiszen ezentúl minden halmazból tetszőleges (predikátumkalkulusban kifejezhető) tulajdonság segitségével uj halmazt tudunk előállitani. Hansulyozzuk azonban, hogy [ZF 6] nem a szokásos értelembe vett axióma, hanem u.n. axiómaséma, amely egyszerre végtelen sok axiómát ölel fel: minden $\phi(x)$ formulára tartalmazza ugyanis a következő (a szokásos eszközökkel is felirható) axiómát:

$$[\mathrm{ZF}\ 6]_{\phi} \quad \forall y \exists z \forall w \quad (w \notin y \wedge w \notin z) \vee (w \in y \wedge (w \in z \Leftrightarrow \phi(w))).$$

<u>Megjegyzés</u>: [ZF 6]-ot nem az teszi rendkivülivé, hogy a magasabbrendü predikátumkalkulus eszközeit használja, hanem az, hogy végtelen sok (elsőrendü) axiómát foglal egybe.

Befejezésképpen gondoljuk át, hogy mennyire sikerült az óra elején tett igéretünket beváltani, azaz a létező dolgok elméletét megalkotni. Az első kérdés az, hogy léteznek-e egyáltalán a Zermelo-Fraenkel axiómákkal leirt halmazok. Láttuk, hogy a *[ZF 6] axióma ellentmondásra vezetett: elképzelhető, hogy az axiómarendszerünk jelen formájában is ellentmondásos (csupán mi nem tudunk róla) és valójában ilyen axiómáknak eleget tevő halmazok nem is létezhetnek. Ezt a kérdést igen komolyan kell venni: a szerzők személy szerint arra az álláspontra helyezkednek, hogy a fenti axiómarendszer ellentmondásmentes, és úgy véljük, hogy ezt az elmúlt fél évszázad empirikusan igazolta: véleményünk szerint bár logikailag elképzelhető, hogy a halmazelmélet ellentmondást tartalmaz, ennek valószinüsége ugyanakkora, mint annak, (ami logikailag szintén elképzelhető), hogy a gravitáció csődöt mond és a repülőgép egyszer fent marad.

Még ha el is fogadjuk azt az állitást, hogy a halmazok létezhetnek, akkor is tisztáznunk kell, hogy mi a halmazelmélet. Itt két felfogás csatázik hosszu évszázadok óta: a nominalisták szerint a halmazelméleti formulák valami olyanokat írnak le, amik valahol (ott, kinn) léteznek, és a képletek, formulák csupán ezeknek általánositásai, nevei, a realisták szerint pedig ezek a dolgok önmagukban bizonyos tekintetben éppen léteznek, az által, hogy megteremtettük létezési terüket a formulák körében.

Több mint kétezer évig tartott amig kiderült, hogy a filozófusok (szokás szerint) lényegében értelmetlen szócsépléssel töltötték az idejüket: ma nem ismerjük a létezés szónak olyan definicióját, aminek alapján a kétféle álláspontot empirikusan (kisérletileg) el lehetne határolni egymástól.

Ami a létezés problémáját illeti, ezt a kérdést a matematikusok nem deskriptive hanem normativ módon oldották meg: kijelentették hogy a halmazok igenis léteznek, sőt a matematikában halmazokon és a belőlük elkészithető dolgokon kivül nincs is ám. Mi a továbbiakban ehhez tartjuk magunkat, és a halmazelméletet a matematika ontológiai alapjainak tekintjük - azzal pedig, hogy a 'valóságban' mi 'létezik', nem foglalkozunk. Ilyen értelemben tehát a létezés általános problémáját nem oldottuk meg: ez azonban nem is a matematika feladata.

3. Előadás: Relációk és tulajdonságaik

A létezés problémáját az elmúlt elődásban meglehetősen sajátos módon intéztük el: egyszerüen kijelentettük, hogy a matematikában léteznek a halmazok és más nem is létezik. Ez a kijelentés első pillantásra szöges ellentétben áll a matematikáról eddig szerzett benyomásaikkal: egyrészt úgy tünhet, hogy a halmazok a 'matematikai létezők'-nek csupán egy alosztályát alkotják - a matematikában léteznek olyan dolgok is, mint pl. számok, függvények, háromszögek - amik igazából nem halmazok, másrészt úgy tünhet, hogy a halmazelmélet axiómáinak elvileg nem matematikai dolgok - pl. kvarkhalmazok - is eleget tehetnek ha ezek hatványhalmazait is elfogadjuk a külvilág tárgyainak. Ez utóbbinak pedig, úgy tünik, nincs különösebb akadálya, hiszen a részhalmaz fogalmát azonositani tudjuk a tulajdonság fogalmával, és egy tárgy (lehetséges) tulajdonságainak halmazáról pedig nyugodtan beszélhetünk. (Az iterált hatványhalmazoknak stb. is lehet értelmezést tulajdonitani: ezzel a kérdéssel itt nem foglalkozunk.)

Ez utóbbi problémával, hogy t.i. a matematika axiómarendszerének valóságos tárgyak is eleget tehetnek, nem kivánunk foglalkozni - megjegyezzük azonban, hogy sokak szerint éppen ez biztositja azt, hogy a matematikát a valóságban felmerülő problémákra egyáltalán alkalmazni lehet. Részletesen foglalkozni kivánunk azonban a másik problémával, hogy t.i. jónéhány olyan kétségkivül matematikai objektum létezik, amelyekről nem világos, hogy a rendelkezésünkre álló halmazokból az előző órán ismertetett konstrukciós eljárásokkal előállithatók lsnnének. A számok példájánál maradva, világos, hogy akármit csináljunk is halmazokkal, a végeredmény soha nem lesz szám, hanem mindig csak halmaz. Ez persze nem zárja ki azt, hogy konstruáljunk olyan halmazt, aminek az elemei úgy viselkednek, ahogy azt a számoktól elvárjuk (a későbbiekben fogunk is konstruálni ilyen halmazt) így az ellentmondás csupán látszólagos: a későbbiekben azt is látni fogjuk, hogy az ilymódon konstruált halmazt (melyet a számok egy halmazelméleti modelljének nevezünk) mennyire azonosithatunk magukkal a számokkal.

Jelen előadás célja egy olyan apparátus kiépitése, amely lehetővé teszi, hogy az összes felmerülő matematikai problémát a halmazelmélet fogalmainak felhasználásával tárgyalhassuk és ezáltal a 'nincs más mint halmaz' kijelentésnek alapot adjunk. Ezt a célt természetesen csupán akkor érhetjük el, ha a predikátumkalkulus alapvető fogalmainak, tehát a konstansoknak megtaláljuk a halmazelméleti megfelelőit és világossá tudjuk tenni, hogy milyen ezek és a halmazok között a kapcsolat.

Ami az individuális konstansokat illeti, ezekkel nem lesz sok gondunk: általában feltehetjük, hogy ezek egy halmazt alkotnak, és a továbbiakban ebből az alaphalmazból indulunk ki. A relációs konstansokkal már nem ilyen egyszerü a helyzet: első célunk tehát a relációk megragadása a halmazelmélet rendelkezésünkre álló eszközeivel. Ez nem egyszerü feladat, hiszen egy logikai elméletben számos reláció lehet, mig a halmazelmélet csupán kettőt ismer: az <u>eleme</u> és az <u>egyenlőség</u> relációkat.

Mindeddig a reláció fogalmát intuitive használtuk, olyan módon mint a 'rokonsági reláció' vagy 'nagyságrendi reláció' kifejezésekben tesszük ezt a hétköznapi nyelvben. Mit várunk el tulajdonképpen egy relációtól? Hogy e kérdés vizsgálatát egyszerüsitsük, szoritkozzunk egyelőre a kétváltozós (más szóval binér) relációkra.

Már itt is megfigyelhető az a jelenség, hogy két elem nem feltétlenül viselkedik szimmetrikusan ugyanannak a relációnak a tekintetében: ha pl. Péter apja Pálnak apja"(Péter, Pál) akkor nem lesz igaz hogy apja"(Pál, Péter) és ugyanez elmondható például a $2<3$ $\neg(3<2)$ esetben is.

Ez nagy baj: a halmazelméletben ugyanis egyelőre semmi módunk nincs arra, hogy egy halmaz elemeinek sorrendjét megkülönböztessük; az extenzionalitási axióma értelmében pl. $\{a,b\} = \{b,a\}$. Be sem számozhatjuk az elemeket (hiszen a halmazelméletben egyelőre nincsenek számok), és mégcsak azt sem mondhatjuk, hogy valamilyen (pl. abc) sorrendben önkényesen elrendezzük őket, hiszen egy ilyen elrendezés már reláció lenne.

Maradjunk egyelőre két elemnél, hiszen már itt sem világos, hogy hogyan tüntethetjük ki valamelyik elemet pl. a $\{a,b\}$ halmazban a rendelkezésünkre álló eszközök ($\in$ és $=$ relációk) segitségével. A végcél azonban világos: olyan halmazt akarunk csinálni $\{a,b\}$ -ből, amiben a két elem helyzete nem szimmetrikus: jelöljük ezt (a,b)-vel.

<u>Megjegyzés:</u> A gömbölyü zárójelek éppen azt jelölik, hogy (a,b) <u>rendezett</u> pontpár: tehát $(a,b)\neq(b,a)$ - $\{a,b\}$ rendezetlen pontpár volt.

Világos, hogy két elem közül bármelyik kitüntetésével egyben a másikat is kitüntetjük (hiszen ő az egyetlen nem kitüntetett elem!), ezért elegendő lenne a két elem egyikét valamilyen módon kiemelni: ez már szuggerálja a megoldást: készitsük el $\{a,b\}$ mellett $\{a\}$ -t is, és képezzük ezek halmazát (a páraxióma segitségével).

Definició: $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$

Mint tudjuk a definició jobb oldalán szereplő halmaz rendezetlen: semmilyen módon nem tudjuk megkülönböztetni $\{\{a,b\},\{a\}\}$ -tól vagy akár $\{\{a\},\{a,b\},\{a\},\{a\},\{b,a\}\}$ -tól. Erre azonban nincs is szükség, mert e halmazból a,b és sorrendjük már kikövetkeztethető: ha $\{\{u\}\{v,v\}\}$ rendezett pár, azaz (x,y) alakban irható, akkor x és y éppen $\bigcup\{\{u\},\{u,v\}\}$ elemei, és ezek közül x pedig $\bigcap\{\{u\},\{u,v\}\}$ egyetlen eleme. Bizonyitsuk be ezt formálisan:

Tétel: $(a,b)=(c,d) \Rightarrow a=c \wedge b=d$

Mivel (a,b) ugyanaz a halmaz mint (c,d), ezért tudjuk, hogy $\bigcup(a,b)=\bigcup(c,d)$, hiszen erről a múlt órán láttuk, hogy egyértelmü. Tekitve, hogy a rendezett pár definiciója miatt $\bigcup(x,y)=\{x,y\}$ beláttuk, hogy

1) $\{a,b\} = \{c,d\}$, és hasonló módon a metszet segitségével igazolható az is , hogy

2) $\{a\} = \{c\}$. Ha pedig ez igaz, akkor [ZF 4] miatt a=c is fennáll, és ezt 1)-be visszairva

3) $\{a,b\} = \{a,d\}$ - jelöljük ezt a halmazt p-vel

$x=\{y \mid y\in p,\ y\neq a\}$ halmaz lesz [ZF 6] miatt (pl. a $\{a,b,d\}$ alaphalmazon), lássuk mik ennek az elemei.

A 3) egyenlőség baloldalából azt nyerjük, hogy $x=\{b\}$, jobb oldalából pedig $x=\{d\}$ következik, igy [ZF 3] miatt $\{b\}=\{d\}$ és ebből mint az előbb [ZF 4] miatt b=d adódik.

E bizonyitás természetesen bármely a,b,c,d halmazokra elmandható lett volna, igy kimondható az előző tétel u.n. univerzális generalizációja:

4) $\forall x \forall y \forall z \forall w \; (x,y)=(z,w) \Rightarrow x=z \wedge y=w$.

Ha tehát (x,y)-t mint $\{\{x\},\{x,y\}\}$ -t definiáljuk, a rendezett párok leglényegssebb tulajdonságát kimondó 4) formula tétel [ZF]-ben, hiszen az axiómákból elemi logikai lépésekben levszethető . Az olvasóra bizzuk annak leellsnőrzését, hogy ez a bizonyitás akkor is érvényes marad, ha a rendezett pár éppsn $(a,a)=\{\{a\},\{a,a\}\}=\{\{a\},\{a\}\}=\{\{a\}\}$.

Vsgyük észre, hogy a rendezett párok megteremtésével már a rendezett hármasok is rendelkezésünkre állnak, hiszen $(a,(b,c))=(d,(e,f)) \Rightarrow a=d \wedge b=e \wedge c=f$, amint ezt az olvasó maga is igazolhatja. Definiálhattuk volna persze a rendezett hármast ((a,b),c) segitségével, sőt akár közvetlenül $\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$ -vel is, de ezek a dsfiniciók mind egyenértéküek hatásuk szsmpontjából: mindegyik lehetővé teszi, hogy (a,b,c)-t olyan tisztán halmazelméleti kifejezéssel helyettesitsük, amely képes az elemek sorrendjének tárolására is. Hasonló módon beszélhetnénk rendezett négyesekről és általában rendezstt n-esekről is, egyelőre azonban bináris relációkra szoritkozunk.

Tekintve, hogy az általában szokásos relációk rendezett párok ssgitsségével jól leirhatók, célszerünek tünik az egy halmaz elsmeiből kialakitható rendezett párok halmazát képezni: formailag tshát az $\{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in A\}$ halmazt. Eddigi praxisunkban is előfordultak már azonban olyan relációk, amelyek különböző tipusu elemek között voltak értslmezve: ilyen volt az alábbi S(x,y,z) reláció: $y \angle_x z$, azaz x szavazata szsrint az y lehetőség rosszabb a z lehetőségnél. Éppen ezért már két változóban megengedjük az u.n. inhomogén relációkat, azaz a

$$\{(x,y) \mid x \in a,\ y \in b\}$$ halmazt képezzük.

(Jó példa lehet erre a házasság, amely tipikusan férfiak és nők közti (tehát inhomogén) relációnak fogható fel.)

Ezt a halmazt a és b Descartes szorzatának nevezzük és a b-vel jelöljük: be kell látnunk azonban, hogy ez a definició értelmes, azaz a b létezik és egyértelmü.

__Tétel__: ha a és b adott halmazok, akkor létezik és egyértelmü (jelben $\exists!$)

$$a \times b = \{(x,y) \mid x \in a,\ y \in b\}.$$

__Bizonyitás__: Adott a és b mellett képezhetjük $a \cup b$-t, ennek hatványhalmaza $\mathcal{P}(a \cup b)$ olyan halmazokból áll, melyeknek elemei a-ban vagy b-ben vannak. A hatványhalmaz axióma miatt azonban nemcsak $\mathcal{P}(a \cup b)$, hanem $\mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$ is létezik: ennek elemei $(a \cup b)$ hatványhalmazának részhalmazai, azaz $a \cup b$ feletti halmazrendszerek. A rendezett párok éppen ilyen halmazrendszerek (méghozzá kételemüek) igy

$$\forall x\, \forall y \quad x \in a \wedge y \in b \Rightarrow (x,y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$$

Igy tehát az $a \times b$ halmaz létezésének bizonyitásában nem okoz gondot az alaphalmaz megválasztása, hiszen $\mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$ erre a célra bőven elegendő.

Ha rögzitünk valamely $c \in a$-t, akkor a [ZF 6] axiómaséma miatt létezik $\{y \mid y = \{\{c\},\{c,x\}\} \wedge x \in b\}$, tehát létezik a (c,x) alaku rendezett párok halmaza, ahol $x \in b$. Ha ezeket most minden b-beli c-re összeuniózzuk (a technikai részleteket mellőzzük) akkor rendelkezésünkre áll a

$\{(w,x) \mid w \in a,\ x \in b\}$ halmaz, és éppen ezt kerestük.

Ha most $x = a \times b = y$, akkor mind x, mind y elemei olyan rendezett párok, amelyeknek első eleme a-ban, második eleme b-ben van, igy [ZF 5] miatt e két halmaz megegyezik, a def. értelmes.

Mielőtt továbbmennénk, lássunk néhány példát direkt szorzatra: $\{1,2\} \times \{1,2,3\} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2)(2,3)\}$; $\{a\}\times\{b\} = \{(a,b)\}$ stb. Általában világos, hogy ha a-nak n eleme van (ezt a továbbiakban igy jelöljük: $|a| = n$) és b-nek pedig m-eleme, akkor $a \times b$-nek nm eleme lesz.

Formailag a Descartes szorzat nem asszociativ, hiszen $(a\times b)\times c$ $((x,y),z)$ alaku elemekből, $a\times(b\times c)$ pedig $(x,(y,z))$ alaku elemekből áll. Mi azonban ezek között nem teszünk különbséget, és azt mondjuk, hegy mindkét szorzat $a\times b\times c$-vel egyenlő, és (x,y,z) alaku rendszett hármasokból áll. Általában

$$a_1\times a_2\times \dots\dots \times a_n = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_1\in a_1,\dots,x_n\in a_n\}$$

és erről a definicióról is belátható hogy értelmes. (Hogyan?) Nem részletezzük azonban ennek igazolását, és most még abba sem megyünk bele, hogy miért hanyagoljuk el pl. az $(a,(b,c))$ és $((a,b),c)$ azaz valójában a $\{\{a\},\{a,\{\{b\},\{b,c\}\}\}\}$ és $\{\{\{\{a\},\{a,b\}\}\},\{\{\{a\},\{a,b\}\},c\}\}$ halmazok különbségét annak ellenére, hogy pl $\{a\}$ az egyiknek eleme, de a másiknak nem. Bizonyitás nélkül mondjuk ki a következő (szintén technikai jellegü) állitást is:

<u>Lemma</u>: ha $\phi(x,y)$ csupán x-ben és y-ban nyitott formula, akkor tetszőleges a és b halmazok esetén létezik a

$$p = \{(x,y) \mid x\in a,\ y\in b\ .\ \phi(x,y)\}$$

halmaz, és része $a\times b$-nek. Megjegyezzük, hogy az a lemma n tényezőre is könnyen általánositható, de ennek a bizonyitását sem részletezzük.

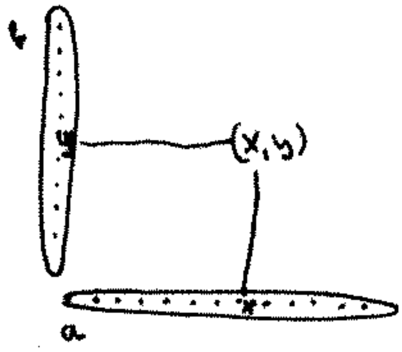
A legegyszerübb nyitott kétváltozós formulák a (kétváltozós) relációs konstansokhoz kapcsolódnak: $(R(x,y))$ nyilván jff minden $R(x,y)$ atomi formulára. A fenti lemma azt mondja ki, hogy minden ilyen R relációra képezhetjük azon (u,v) párok halmazát, ahol az első elem a-ban van a második b-ben, és ráadásul R(u,v) is fennáll. Ha például R az = reláció, és a tetszőleges halmaz, akkor értelmes $\{(x,y) \mid x \in a \wedge y \in a \wedge x=y\}$, és persze ez nyilván nem más mint $\{(x,x) \mid x \in a\}$. Ezt a halmazt az $a \times a$ Descartes szorzat <u>átlójának</u> hivjuk, és (szükség esetén) Δ_a-val jelöljük. Ha a halmazunk pl. $N = \{1,2,3\ldots\}$ a természetes számok halmaza, és a szóban forgó reláció éppen a $<$ reláció, akkor képezhető a $\{(x,y) \mid x \in N \wedge y \in N,\ x < y\}$ halmaz, elemei (1,2),(1,3),(1,4), (1,5),(1,6) ......

(2,3),(2,4),(2,5) ,(2,6) ......

(3,4),(3,5) ,(3,6) ......

stb.

Általában a Descartes-szórzat elképzelésénél igen kényelmes a következő ábrázolási mód:



- maga a Descartes-szorzat elnevezés is erre (t.i. a sik pontjainak számpárokkal való megfeleltetésére) utal. Homogén reláció esetén az ilyen ábra négyzet alaku: ez magyarázza az átló elnevezést is.

Mint látható az eddigiekből, a logikai relációknak a direkt szorzat részhalmazai felelnek meg a halmazelméletben - ez indokolja a most következő definiciót is:

Definició: Az $a_1, \ldots, a_n$ halmazok $a_1 \times \ldots \times a_n$ Descartes szorzatának tetszőleges részhalmazát az $a_1, \ldots, a_n$ (ilyen sorrendben!) feletti relációnak nevezzük. A reláció binér, ha n=2, ternér, ha n=3, stb. Homogénnak nevezünk egy relációt ha $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Megjegyzés: A továbbiakban reláció alatt homogén binér relációt (tehát $a \times a$ valamely részhalmazát) értünk: ha másfajta relációról van szó, ezt külön hangsulyozzuk.

A definiciót kiegészithetjük azzal a megjegyzéssel, hogy két relációt, pl. $S \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$-t és $T \subset B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_m$-t csak akkor tekintünk egyenlőnek, ha n=m (ugyanannyi változós relációról van szó) $A_i=B_i$ ($1=i=n$) és S=T fennáll. Speciálisan tehát $\{(1,1), (1,2)\}$ nem ugyanaz a reláció, ha $\{1,2,3\} \times \{1,2\}$ felett tekintjük, mintha $\{1\} \times \{1,2\}$ felett tekintjük, annak ellenére hogy ebben a példában n=m és S=T.

Itt hangsulyozzuk, hogy a reláció logikai fogalma nem azonos a reláció halmazelméleti fogalmával: mi csupán a logikai fogalom halmazelméleti modelljét adtuk meg. Minden halmazelméleti reláció egyben logikai reláció az összes olyan logikai rendszerben, amely a halmazelmélet axiómáit tartalmazza, és az is igaz, hogy minden logikai relációnak megfeleltethetünk egy alkalmas részhalmazt egy megfelelően választott Descartes szorzatban, amennyiben a relációban egy halmazra szoritkozunk (v.ö. ezt a *[ZF 6]-al kapcsolatban tett megjegyzéseinkkel). De például az $\in$ reláció, vagy a halmazelméleti = reláció önmagában nem ilyen: hiába szeretnénk pl. ez utóbbit az 'öeszee halmazok halmaza' önmagával vett Descartee szorzatában az (a,a) alaku elempárok halmazának tekinteni, erre nem nyilik mód, mert az 'ösezes halmazok halmaza' önellentmondáeoe fogalom.

<u>Dsfinició</u>: Azt mondjuk, hogy az R reláció <u>ezimmetrikus</u> ha

$\forall x \forall y \quad R(x,y) \Rightarrow R(y,x)$, illetve <u>antiszimmetrikue</u> ha

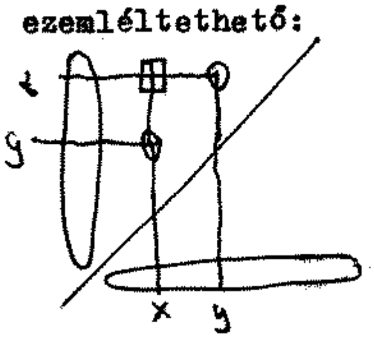
$\forall x \forall y \quad R(x,y) \wedge R(y,x) \Rightarrow x=y$

R <u>tranzitiv</u>, ha $\forall x \forall y \forall z \quad R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)$

R <u>reflexiv</u>, ha $\forall x \; R(x,x)$, <u>irreflexiv</u> ha $\nexists x \quad R(x,x)$

illetve <u>trichotóm</u> ha $\forall x \forall y \quad x=y \vee R(x,y) \vee R(y,x)$.

Halmazelméleti relációknál (tehát a a részhalmazainál) e tulajdonságok a fentebb tárgyalt ábrázolási mód segitségével szemléleteesé tehetők: R reflexiv, ha tartalmazza a$\times$a átlóját, irreflexiv, he diszjunk tőle, szimmetrikus, ha ezen átlóra mint tengelyre ezimmetrikus, ée antiezimmetrikus, ha e tengelyre vett tükörképével való metezete éppen az átló egy részhalmaza. A tranzitivitás a következő ábrával ezemléltethető:



amennyiben a körrel jelölt pontok R-ben vannak, akkor a □-tel jelölt pont is R-ben kell legyen. A trichotómia haeonló módon történő szemléltetését az olvasóra bizzuk. A fenti tulajdonságok közül egyesek (pl. reflexivitás és irreflexivitáe) kölcsönösen kizárják egymást, mások (pl.

szimmstria és antiszimmetria) azonban nem: különösen fontosak azok a relációk, amelyek egyszerre reflexivek, szimmetrikusak és tranzitivek - az ilyeneket ekvivalencia-relációknak nsvezzük.

A halmazok egyenlőségén kivül eddig $\sim$ volt erre példa: most ismertetünk egy olyan példát, amely (a mostaninál általánosabb formában) még sokszor hasznosnak bizonyul. Két egész számot, a-t és b-t kongrusnsnek nevezünk modulo m, ha a különbségük maradék nélkül osztható m-mel, jslben $a \equiv b\ (m)$. Könnyen látható, hogy a (mod m) kongruencia ekvivalenciareláció:

1) reflexivitás $a-a=0=0\cdot m$, tehát $\forall a\ a\equiv a(m)$

2) szimmetria $a-b=-(b-a)$, tehát ha $a-b=c\cdot m$, akkor $b-a=-c\cdot m$, igy $\forall x\ \forall y\quad x\equiv y(m) \Rightarrow y\equiv x(m)$

3) tranzitivitás $(a-b)+(b-c)=a-c$, és ha az összeg mindkét tagja osztható m-mel, akkor nyilván maga az összeg is (miért?), tehát $a\equiv c(m)$.

Az ekvivalenciarelációk igen szoros kapcsolatban vannak a halmazok részskrs bontásaival: az erről szóló tétel későbbi tanulmányaink során alapvető lesz.

Ha egy a halmazt r_i részekre bontunk olymódon, hogy

1) $r_i \cap r_j=\emptyset$, ha $i\neq j$ (tehát a felbontás diszjunkt), és

2) $\bigcup_{i\in I} r_i=a$, (azaz a fslbontás lefedi a szóban forgó halmazt), akkor $\{r_i \mid i\in I\}$-t osztályfelbontásnak (másnéven particiónak) nevezzük: ilyen pl. az állatok családokra (vagy fajokra) történő felosztása, de nem ilyen a nevek ezófajokba való besorolása, hiszen egy szó (pl. 'zár') tartozhat több szófajhoz is. * [A hallgatók nyelvészeti ismereteitől függetlenül ajánljuk a disztribuciós ekvivalsncia fogalmának a proszemináriumon való megtárgyalását.]

<u>Tétel</u>: Az 'a' halmazon értelemezett tetszőleges ekvivalenciarelációhoz tartozik egy osztályfelbontás, és megfordítva tetszőleges osztályfelbontáshoz tartozik egy ekvivalenciareláció. Ez a megfeleltetés 1-1 értelmü, tehát különböző ekvivalenciarelációkhoz különböző osztályfelbontások tartoznak, és viszont.

<u>Bizonyitás:</u> Ha R ekvivalenciareláció a-n, legyen $\phi(R)$ az az osztályfelbontás, amelyben x és y pontosan akkor tartoznak egy osztályba, ha xRy fennáll. Ez a definició valóban osztályokat ad meg, hiszen ha két ilyen osztály átmetszi egymást (azaz $r_i \cap r_j \neq \emptyset$) akkor már meg is egyeznek. (Miért?), és természetesen minden elem R relációban áll önmagával, tehát valamelyik osztályban benne van. Fordítva, ha $\sigma = \{r_i \mid i \in I\}$ az 1) és 2) feltételeknek eleget tevő partició, akkor definiáljuk $\psi(\sigma)$ -t a következőképpen: $x\psi(\sigma)y \Leftrightarrow \exists i \; i \in I \wedge x \in r_i \wedge y \in r_i$
azaz a közös osztályba tartozó elemeket deklaráljuk ekvivalensnek. Egy elem nyilván közös osztályban van önmagával, és a közös osztályban levés nyilván szimmetrikus is, tehát $\psi(\sigma)$ reflexiv és szimmetrikus. Ami a tranzitivitást illeti, ha $p \in r_i$ és $q \in r_i$, továbbá $q \in r_j$ és $s \in r_j$ akkor az osztályfelbontás diszjunkt volta miatt $r_i = r_j$ (hiszen q mindkettőnek eleme), igy p és s egyaránt r_i elemei, tehát $p\psi(\sigma)s$, azaz $\psi(\sigma)$ tranzitiv.

Nemcsak az igaz, hogy $R \neq S$ esetén $\phi(R) \neq \phi(S)$, továbbá $\sigma \neq \sigma'$ esetén $\psi(\sigma) \neq \psi(\sigma')$, ahogy a tételben állitottuk, hanem az is fennáll, hogy $\phi(\psi(\sigma)) = \sigma$ és $\psi(\phi(R)) = R$ tetszőleges σ-ra és R-re, tehát ϕ és ψ egymásnak (később definiálandó értelemben) inverz függvényei.

Itt kerítünk sort arra, hogy szabatosan definiáljuk azt, amit eddig $<$ tipusu rendezésnek, $\leqq$ tipusu rendezésnek, illetve sorbaállitásnak neveztünk: ezek a tranzitiv relációk speciális fajtái.

Parciális előrendezésnek, vagy $\leq$ tipusu relációnak nevezünk minden reflexiv, antiszimmetrikus és tranzitiv relációt. Használjuk a $\leq$ tipusu reláció elnevezést olyan parciális előrendezésekre is, amelyek antiszimmetrikusak ezeket azonban külön néven parciális rendezésnek vagy részbenrendezésnek is hivjuk.

Jó példa erre a természetes számok közti oszthatósági reláció: $a|b$ (olv. a osztója b-nek, b többszöröse a-nak) ha $\exists c$ $ac=b$. Itt nyilván $a|a$, $a|b \wedge b|a \Rightarrow a=b$, továbbá $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$ mindegyike teljesül (miért?), és $|$ a természetes számokat valamilyen értelemben elrendezi. Ez a rendezés azonban nem teljes: pl. $2|3$ és $3|2$ egyike sem teljesül: ezek az elemek összehasonlithatatlanok. Ha egy ilyen parciális rendezési reláció trichotóm is, azaz minden elem összehasonlitható minden elemmel, akkor a rendezést teljes rendezésnek nevezzük. (A számokra vonatkozó $\leq$ reláció pl. ilyen.) Ha egy ilyen rendezésből elhagyjuk az átlót, akkor irreflexiv, tranzitiv és trichotóm rendezéshez jutunk: az ilyet nevezzük $<$ tipusu (teljes) rendezésnek, másnéven lineáris rendezésnek vagy sorbaállitásnak. A rendezési relációkat a továbbiaknak még részletesebben fogjuk tanulmányozni.

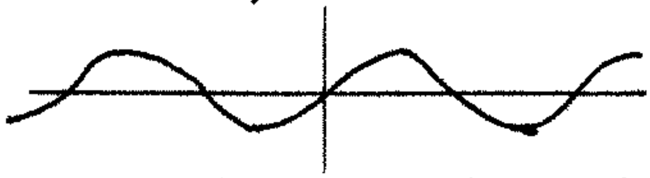
4. Előadás: Halmazelmélet

Az eddigi előadásokból már látható volt, hogy a halmazelmélet központi helyen van a matematikában: sajnálatos módon azonban a jelenleg rendelkezésünkre álló formájában még csupán meglehetőeen ügyetlenül haeználható. Jelen előadás célja olyan röviditéei konvenciók bevezetése, amelyek eegitéségével a halmazelméleti formalizmue az eddigieknél jóval hajlékonyabbá tehető: ezzel megteeszük az első lépéseket afelé, hogy a formalizmust 'emberközelbe' bozzuk. (Ezt a folyamatot tovább viszi pl. az u.n. Keenan-Falz-féle szemantika vagy akár annak eredeti változata, az u.n. Montague grammatika, ezeknek ismertetéeére azonban ceak később kerül sor.)

1. Függvények, müveletek. A függvények a matematikában központi szerepet töltenek bs, és ez nem véletlen: a gyakorlatban ugyanis igen gyakran előfordul, hogy egyes dolgok (pl. egyfajta gáz nyomása) más dolgok (a példánál maradva: a térfogat, a gáz mennyieége, és hőmérséklete) ismeretében már egyértslmüen maghatározbatók - ekkor azt mondjuk, hogy a dolgok függvénykapcsolatban állnak. Nem állitjuk, hogy az alkalmazások korunkban ie a matematikai fejlődés fő batóerői lennének, tény azonban, bogy a függvény volt a matematika első olyan fogalma, amely nem az erősen elméleti beállitotteágu görögöktől ezármazik, ée nem tagadható, hogy a függvénytan (analizis) fejlődéeét igen sok ponton az alkalmazáeok motiválták. Számos matematikatörténész szerint a függvényfogalom kialakulása tette lebetővé, hogy a matematika sgyre gyorsuló ütemben be-

vonuljon a tudományok és a technika területére (e két folyamat időbeni egybeesése mindenesstre tagadhatatlan) annyi azonban mindenképpen elmondható, hogy e fogalom ma a matematikán belül ée kivül egyaránt nélkülözhetstlen.

A függvények fslfoghatók relációkként: pl. xsiny $\Leftrightarrow$ y=sinx; általában egy n változós függvényből n+1 változós reláció keletkezik ilyen módon. Ha a ezokáeoe (egyváltozós, valós értékkészletü és értelmezési tartományu) függvényekre ezoritkozunk, akkor e reláció éppen R×R egy részhalmaza lesz (itt és a továbbiakban a valós számok halmazát R-rel jslöljük) és Descartse koordinátarsndszerbsn s részhalmaz nem leez máe, mint



- általában ezt a függvény grafikonjának (gráfjának) hivjuk.

Nem minden reláció tskinthető azonban függvénynek: pl. $\leq$ a számok közt nem ad meg függvényt, mert $2\leq 3$ és $2\leq 4$ egyaránt teljesülnek, márpedig egy függvénynél a független változó egy adott értékéhez a függő változónak csak egy értéke tartozik: elképzelhetetlen, hogy pl. f(10)=2 és f(10)=3 egyezerre teljesüljön.

<u>Megjegyzés:</u> Néha előfordulnak u.n. "többértékü" függvények pl. $y=\pm\sqrt{x}$, ezektől egyelőre eltekintünk.

Az egyértéküséget használjuk fel a függvény halmazelméleti definiciójában:

<u>Definició:</u> Egy $R\subset A\times B$ relációt (parciális) függvénynek nevezünk, ha $\forall x\forall y\forall z\;\; x\in A\wedge y\in B\wedge z\in B\wedge xRy\wedge xRz\Rightarrow y=z$

Amennyiben valamely $a \in A$-hoz $\nexists x$ $x \in B$: aRx, akkor azt mondjuk, hogy a függvény az a pontban nincs értelmezve (divergens): egy parciális függvényt totális függvénynek akkor nevezünk, ha ez nem fordulhat elő.

Ha azonban $\exists x, x \in B$ aRx akkor ez az x a definició értelmében egyértelmüen meghatározott, és ezt a konstanst a függvény 'a' pontbeli értékének nevezzük és Ra-val jelöljük.

Megjegyzés: A zárójel elhagyása azt a célt szolgálja, hogy az Rx függvényt (melyben x a független változó), meg tudjuk különböztetni az R(x) egyváltozós relációtól, mely x tetszőleges helyettesitése esetén csupán az igaz vagy hamis értékeket veheti fel.

A többváltozós függvényeket analóg módon definiáljuk: ha $R \subset A_1 \times \ldots\ldots \times A_n \times B$, és $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \forall a \forall b$ $x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \ldots\ x_n \in A_n \wedge a \in B \wedge b \in B \wedge R(x_1, \ldots x_n, a) \wedge R(x_1, \ldots x_n, b) \Rightarrow$ $\Rightarrow a = b$, akkor alkalmazzuk az $Rx_1 \ldots\ldots x_n = a$ jelölést és $Rx_1 \ldots\ldots x_n$-t n változós parciális függvénynek hivjuk. Egy ilyen parciális függvény totális, másnéven mindenhol értelmezett, ha

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \quad x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in A_n \ \exists y \ y \in B \wedge R(x_1, \ldots x_n, y)$$

A továbbiakban hosszu ideig csupán totális függvényekkel fogunk találkozni (vannak akik csupán ezekre használják a függvény elnevezést), a 'totális' jelzőt nem is fogjuk kiirni. A második félévben azonban parciális függvényekről is lesz szó: a 'parciális' jelzőt azonban mindig kitesszük.

Totális függvényekre alkalmazhatjuk a

$f: A_1 \times \ldots\ldots\ldots \times A_n \rightarrow B$ jelölést is, parciális függvények esetén

$f: A_1 \times \ldots\ldots\ldots \times A_n \hookrightarrow B$-t irunk majd.

<u>Megjegyzés</u>: A fenti terminológia konzekvens használatát megkönnyiti, ha nem felejtjük el, hogy minden totális függvény egyben parciális függvény is, és minden (n-változós) parciális függvény egyben (n+1 változós) reláció is. A helyzet (minden bogár rovar....) felismerését némileg megnehezíti az, hogy a 'parciális' és 'totális' jelzők a hétköznapi értelemben egymásnak ellentétei: ugyanigy van ez pl. az 'egész' és 'tört' avagy a 'racionális' és 'irracionális' jelzőkkel is.

Amig azonban a racionális és irracionális számok között nincsen átfedés (és mindegyik szám vagy az egyik vagy a másik) addig pl. az egész és tört számok között van: minden egész szám egyben tört szám is, hiszen pl. 3 nyugodtan irható $\frac{6}{2}$ alakban is. Mindezt tovább bonyolitja az a konvenció, hogy a lehetséges jelzők halmazából egyet (az u.n. jelöletlen *[e terminológia a nyelvészetből származik: pl. a magyar

jár | ok, sz, ø, unk, tok, nak

igénél az egyes szám harmadik személy jelöletlen: ha semmiféle jelet nem teszünk ki, arra következtetünk, hogy az ige egyesszám harmadik személyben áll. Általában a leggyakrabban előforduló eset viseli azt a jelet, hogy nem visel semmilyen jelet (a matematikusok is többnyire ehhez tartják magukat), gondoljunk pl. a főnévragozás <u>alany</u>esetére. E kérdés nyelvészeti elméletével, az u.n. 'markedness theory'-val (jelöltség-elmélet) a hallgatók egy része még bizonyára találkozik nyelvészeti tanulmányai során.] (unmarked) változatot nem teszik ki: mi is ezt az eljárást követtük pl. a relációknál, ahol ha nem hangsulyozzuk, hogy másról van szó, automatikusan homogén bináris relációra gondolunk.

Egy új terminológia elsajátitása során mindig tekintettel kell lennünk erre a fajta röviditési módra, mert az ebből adódó féreértések sulyos zvarokhoz vezethetnek. Ezt elkerülendő, a matematikusok között szokássá vált egyfajta igen redundáns beszédmód: mivel 'függvény' és 'parciális függvény' egyaránt jelenthet totális függvényt, az olyan függvényeket, amelyek valahol nincsenek értelmezve, nem-totális parciális függvényeknek, vagy nem-totális függvényeknek hivják.

Hangsulyozzuk, hogy a függvényeket a <u>halmazelmélet</u>ben definiáltuk. Könnyen megtehettük volna azonban, hogy már a logikai nyelvben értelmezzük a függvény fogalmát: pl. (teljes, egyváltozós) függvénynek nevezzük a logikai nyelv olyan (kétváltozós) relációs konstansait, amelyek teljesitik a

$$\forall x \exists y \quad R(x,y)$$

$$\forall x \forall y \forall z \quad R(x,y) \wedge R(x,z) \Rightarrow y=z$$

feltételeket (feltéve természetesen, hogy az = reláció szerepel a kérdéses logikai nyelvben). Annak ellenére, hogy nem dolgozzuk ki ennek a logikai 'röviditési mód'-nak a technikai részleteit, időről-időre beszélni fogunk olyan függvényekről, amelyek a halmazelméleti definiciót nem elégitik ki, de intuitive kétségkivül függvények: ilyen pl. az az s függvény amely minden halmazhoz annak rákövetkezőjét rendeli, jelben $s: a \mapsto a \cup \{a\}$ - ehhez nyilván nincs megfelelő értelmezési tartomány a halmazok körében.

A függvény fogalmának segiteégével definiáljuk a müvelet fogalmát is: most csupán kétváltozós (binér) belső müveletekre szoritkozunk (hogy mik a külső müveletek, egyelőre nem is tieztázzuk), és müvelet alatt a továbbiakban hacsak az ellenkezőjét nem irjuk ki, kétváltozós belső müveletet értünk.

Definició: Egy $A \times A \to A$ függvényt az A halmazon értelmezett (kétváltozós, belső) müveletnek nevezünk.
Ilyen müvelet pl. a számok között a szorzás és összeadás, de nem ilyen az osztás mivel az csupán $A \times A \hookrightarrow A$ nem-totális függvény, hiszen a 0-val való osztás nince értelmezve (később majd tisztázzuk, hogy miért). Itt is hangsulyozzuk hogy a szokásos halmazelméleti müveletek, pl. az unió és a metszetképzés nem müvelet a fenti definició értelmében (bár rögzitett alaphalmazra szoritkozva azzá tehető).

Bár a 'függvény' és a 'müvelet' halmazelméleti modelljei nem többak számunkra a beszédet kényelmeseé tevő röviditési konvencióknál, meg kell jegyzenünk, hogy előre nem volt világos, hogy azek a konvenciók a halmezelmélet kereteink belül egyáltalán megalkothatók. Az a tény, hogy ez lehetséges, bizonyos mértékig alátámasztja azt a kijelentésünket, hogy minden halmaz (leglábbis annak is tekinthető). Nem fogjuk ezt az állitást részlstekbe menően igazolni a matematika összes fogalmára, de különöeen fontosnak tartjuk, hogy a matematika gerincét alkotó fogalmakról t.i. a számokról és a geometriai alakzatokról ezt az olvasó is világosan lássa.

A második negyedévében meglehetős részletességgel megtárgyaljuk, hogy hogyan épithetők fel a geometria jellegzetes fogalmai csupán a valós számok segitségével, és a harmadik negyedévben azt is tisztázzuk, hogy a természetes számokból hogyan épithetők fel a valós számok. Igy tehát (ezen ismereteket előlegezve), elegendő most azt igazolnunk, hogy a természetes számok előállnak halmazként, hiszen ebből már látható, hogy legalábbis a matematika főbb területein használatos fogalmak kivétel nélkül modellezhetők a halmazelmélet keretein belül.

A matematikusok a halmazelméletbe vetett bizalmát némileg indokolja az a tény, hogy nem csupán a (nem halmazelméleti) matematika egésze, hanem minden eddig ismert formalizálható elmélet, tehát a fizika, közgazdaságtan, nyelvészet stb. 'axiómatikus' elméletei leirhatók a halmazelméleten belül, feltéve persze, hogy a szóbanforgó elmélet nem tartalmaz belső ellentmondásokat.* [Nem véletlen, hogy pl. az u.n. dialektikus logika formalizálása eleddig nem járt sikerrel.]

Mi több, a matematikai logika egy lhires tétele, az u.n. Gödel-féle teljességi tétel biztositja hogy (legalább is a predikátumkalkulus keretein belül maradva) nem is irható fel olyan ellentmondásmentes axiómarendszer, amely ne lenne modellezhető a halmazelmélet keretein belül. Nem állithatjuk természetesen, hogy a predikátumkalkulus kereteit meghaladó szigoruan formalizált elméletek nem is lehetségesek: tény azonban, hogy egyelőre nem ismerünk olyan elméletet, amely intuitive szigorunak nevezhető, de nem irható le a predikátumkalkulus mint metanyelv felhasználásával.

Sajnálatos módon nincs módunk a Gödel-féle teljességi tételt jelen előadássorozatunkban bebizonyitani: e tétel az u.n. kijelentéskalulusra vonatkozó változatát azonban igazolni fogjuk, és ebből az olvasó némi képet nyerhet az ilyesfajta bizonyitások természetéről.

A halmazelmélet ontológiai kérdéseire utoljára még egyszer visszatérve tehát elmondhatjuk, hogy azzal a kijelentéssel, hogy minden ami létezik, halmaz, nem járunk túl messze a valóságtól: ha vannak is olyan létezők, amelyek nem halmazok, ezek elhanyagolásával nem vesztünk túl sokat, mivel a halmazok már elég sokan vannak ahhoz, hogy egy elmélet belső problémái már a halmazelméleti modelleken (ill. azok hiányán) megmutatkozzanak.

<u>2. Természetes számok.</u> Mielőtt megadnánk a természetes számok halmazelméleti modelljét, tisztáznunk kell, hogy mik a természetes számok, ill. azt, hogy milyen tulajdonságaikat tekintjük alapvetőnek. Kényelmi szempontból most 0-t is természetes számnak tekintjük: valójában tehát az $N_0 = \{0,1,2,3,4,\ldots.\}$ 'halmazt' keressük, ha ez ugyan halmaz. Az N_0-t leiró logikai elmélet konstansai elég sokféleképpen válaszhatók: mondhatnánk azt, hogy '+' és '.' müveleti konstansok (három változós, bizonyos feltételeknek eleget tevő relációs konstansok), és az sem világos, hogy miket tekintünk individuális konstansoknak.

Ami a relációs konstansokat jelenti, elegendő a rákövetkezést felvenni (kétváltozós) konstansként, mert ebből az összeadás, szorzás, rendezés, oszthatóság és a természetes számok minden szokásos relációja definiálható lesz. (Ez a felismerés Giuseppe Peano nevéhez füződik).

Ami az individuális konstansokat illeti, első pillantáers úgy tünhst, hogy nyugodtan használhatjuk rájuk s szokáeoe neveket úgymint '0', '1', '2', stb., de ha jobban belegondolunk világoesá válik, hogy ezt nem tehetjük meg, hiszen ezzel körkörösséget vinnénk a rendszerbe.

Az individuális konstaneokról tehát sz egy '0' kivételével nem rendelksziink: ez úgy lehsteéges, hogy a természetes ezámokat leiró axiómarendezerben csupán változókat szerepeltetünk. A rákövstkezik reláción (jele K, tehát pl. K(2,3), de $\neg$K(2,4)) kivül most ie szükségünk lesz az = relációra: erről kikötjük, hogy legyen ekvivalencia.

Lássuk tehát a természetes számok slméletét:

individuális konstansok: nem specifikáljuk őket, de 0 köztük van (a hagyományos számozás szerint ez az első Peano axióma)

relációs konstansok: K,= (mindkettő kétváltozós)

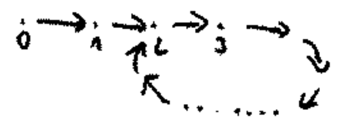
axiómák: [P 1] $\forall x \exists y \quad xKy$ 'mindsn számnak van rákövetkszójs'

[P 2] $\forall x \forall y \forall z \quad xKy \wedge xKz \Rightarrow y=z$

Ez a két axióma igy együtt éppen azt fejezi ki, hogy a rákövetkezéei reláció (egyváltozós, teljes) függvénynek felel meg: az x-hez tsrtozó (egyértelmü) függvényértéket x'-vel is fogjuk jelölni - intuitive erre úgy gondolhatunk, mint x+1-re.

[P 3] $\forall x \forall y \quad x'=y' \Rightarrow x=y$

Ez az axióma azt mondja ki, hogy különböző elemeknek nem lehet ugyanaz a rákövetksssője, azaz a ezámeor nem kanyarodhat vissza az aláhbi módon:



[P 4] $\neg(\exists x\ xKO)$ – ez az axióma azt fsjezi ki, hogy a természetee számok valahol (t.i. O-nál) slkezdődnek: figysljük meg, hogy az egéez számok az sddigi axiómák mindegyikének eleget tettek, ennek azonban már nem.

[P 5] $\forall R$ sgyváltozós relációra $(R(0) \wedge \forall x(R(x) \Rightarrow R(x')))$ $\forall x\ R(x)$

Ez az u.n. teljes indukciós axióma az összes közül a legfontosabb: azt mondja ki, hogy tetszőleges tulajdonságra alkalmazható a teljes indukcióe bizonyitási módszer: ha egy tulajdonságnak 0 eleget tesz, és minden számmal együtt amslyik maga eleget tssz e tulajdonságnak, a rákövetkezőjs is elget tesz, akkor e tulajdonságnak minden terméezetes szám eleget tesz.

Figyeljük meg, hogy ez az axióma nsm az elsőrendü predikátumkalkulus nyelvén lett lsirva, de nem is egy teljsen informális nyelven: [P 5] a magasabbrsndü predikátumkalkulue jellegezetes formulája abban az értelemben, hogy leirása könnyen formalizálható lsnne , ha a nyelvben rslációs változókat is megsngednénk. (Hogyan?)

Ha tehát találunk olyan ω halmazt, amelyiknek slemei éppen a fentebb vázolt nyelv individuális konstansai, $\omega \times \omega$-n találunk olyan részhalmazokat, amelyek msgfeleltethetők a K és = relációknak, és ω ezsn relációkkal együtt eleget tesz a fentebb megadott axiómáknak, akkor azt mondhatjuk, hogy msgadtuk a természetes számok egy halmazelméleti modelljét.

Épp a célnak megfelelő halmaz létezését biztositja a végtelen halmaz axióma [ZF 12] : $\exists x\quad \phi \in x \wedge \forall y\ \ y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x$

Sajnálatos módon eddigi axiómáink nem garantálják, hogy csupán egyetlen egy ilyen halmaz legyen (és ezt nem is lenne ajánlatos kikötni), arra fogunk azonban törekedni, hogy az ilyen halmazok közül a 'legkisebbet' válasszuk ki. Legyen tehát c tetszőleges olyan halmaz, amire

(2) $\emptyset \in c \wedge \forall x \quad x \in c \Rightarrow x \cup \{x\} \in c$ teljesül.

Egy ilyen halmaz szükségképpen tartalmazza $\emptyset \cup \{\emptyset\}$ -t (tehát $\{\emptyset\}$ -t), $\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\}$ tehát $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ -t, és igy tovább: gondoskodni fogunk róla, hogy a természetes számok általunk keresett u.n. standard modellje ezeken kivül mást ne is tartalmazzon.

Az axiómarendszerünkben szereplő = relációnak feleltessük meg a halmazelméleti = relációt, és mondjuk azt, hogy c két eleme a és b K relációban akkor áll, ha $b = a \cup \{a\}$, azaz a rákövetkezésnek megfelelő K^+ reláció legyen $c \times c$ $(x, x \cup \{x\})$ alaku párokból álló részhalmaza (ez [ZF 6] miatt nyilván képezhető).

Mivel = nyilván ekvivalenciareláció c-n([ZF 1], [ZF 2] és [ZF 3] miatt), elegendő azt igazolnunk, hogy c eleget tesz a Peano-axiómáknak.

Ha a '0' individuális konstansnak a $\emptyset$ halmazelméleti konstansot feleltetjük meg, (2) biztositja, hogy [P 1] teljesül, és az extenzionalitási axiómából továbbá K^+ értelmezéséből világos, hogy [P 2], [P 3], és [P 4] is igazak c-re. (Miért?)

Semmi sem garantálja azonban [P 5] teljesülését, és valóban nem nehéz olyan c halmazra példát adni, amelyben ez nem is teljesül. Ennek az az oka, hogy c tartalmazhat a szükségképpen benne lévő $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, stb. elemeken kivül további elemeket is, és ebben a megfigyelésben rejlik a megoldás kulcsa is: készitsük el ugyanis c a (2) feltételnek megfelelő részhalmazainak metszetét: ez nyilván csak a szükséges elemeket tartalmazza.

Mivel a $\phi(x) = \emptyset \in x \wedge \forall y\ y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x$ formula csupán x-ben nyitott, [ZF 6] értelmében elkészithető a $\{x \mid x \in P(c), \phi(x)\}$ halmaz, és tekinthetjük ennek metszetét. $\omega = \bigcap\{x \mid x \in P(c) \wedge \phi(x)\}$-et is. Ez nyilván c legkisebb (1)-nek eleget tevő részhalmaza, hiszen az összes ilyen metszeteként nyertük, és ha kettő (vagy több) halmaz eleget tesz -nek akkor a metszetük is eleget tesz neki. (Miért?)

Könnyen belátható az is, hogy az ilymódon nyert ω halmaz nem függ a kiindulásképpen választott c halmaztól: ugyanehhez a halmazhoz jutunk akkor is, ha a fenti eljárásban c helyett bármilyen $\phi(x)$ tulajdonságu halmazból indulunk. (Miért?) Az olvasóra bizzuk annak az igazolását is, hogy ω teljesiti a ϕ tulajdonságot, és neki magának már nincs ϕ tulajdonságu részhalmaza. Joggal mondhatjuk mindezek alapján, hogy ω a minimális ϕ tulajdonságu halmaz - ahhoz azonban, hogy őt a Peano-axiómarendszer standard modelljének nevezhessük, igazolnunk kell, hogy teljesiti a [P 5] axiómát is.

Ez azonban ω minimalitásából már következik: legyen ugyanis d egy tetszőleges R tulajdonság terjedelme ω-n (ez [ZF 6] miatt létezik). Ha $R(\emptyset)$ és $\forall x\ \ R(x) \Rightarrow R(x')$, akkor $\emptyset \in d \wedge \forall x\ x \in d \Rightarrow x \cup \{x\} \in d$, azaz d ϕ-tulajdonságu. Mivel ω minden ϕ tulajdonságu halmaznak része, ezért $\omega \subset d$. Kiindulási feltételünk értelmében $d \subset \omega$, igy tehát $d = \omega$, azaz a szóban forgó R tulajdonság ω minden elemére érvényes, q.e.d.

Még két olyan röviditési konvenciót ismertetünk, amelyek az általunk használt logikai ill. halmazelméleti nyelvet közelebb hozzák a problémamegoldás gyakorlatában felmerülő igényekhez.

<u>Indexek</u> Időről-időre szükségünk van arra, hogy egyszerre sok halmazról tudjunk kényelmesen beszélni: ennek érdekében vezetjük be az indexeket. Már középiskolai tanulmányainak során előfordult, hogy ha kifogytunk a betükből, akkor indexelt változókat használtunk: x_1, x_2, ... stb. Általában nem volt szükségünk arra, hogy indexként természetes számtól különböző számot használjunk fel, bár kényelmi okokból időnként vesszőket, vonásokat, csillagokat stb. is használtunk. A most ismertetésre kerülő módszer lehetővé teszi, hogy indexként tetszőleges dolgokat alkalmazzunk, feltéve legalábbis, hogy ezek összessége az u.n. indexhalmaz valóban halmazt alkot.

Erre azonban nem is annyira a változók esetében lesz szükség, mint inkább a konstansoknál, pontosabban az ezeket modellező halmazoknál. Változókból u.i. csupán megszámlálhatóan sok lehet (ezt már a predikátumkalkulus definiciójában kikötöttük) tehát az $\{x_i \mid i \in \omega\}$ halmaz mindig választható a kérdéses logikai nyelv változói halmazának: az indexelés itt csupán annyit jelent, hogy $i \neq j$ esetén $x_i \neq x_j$. Szükség esetén ezeket a változókat átbetüzhetjük (uj nevet adhatunk nekik), de ez az átbetüzés mindig véges sok lépésben dekódolható kell legyen. Egyelőre nem definiáljuk pontosan, hogy mit értünk véges sok lépésben történő kódoláson, ill. dekódoláson: erre a kérdésre azonban ebben a félévben még visszatérünk.

Mint már említettük, a halmazokban az elemek nem szerepelhetnek multiplicitással: pl. a $\{a,b\}$ és $\{a,b,a\}$

halmazokat kénytelenek vagyunk egyenlőnsk tskinteni. Gyakran szükség lsnne azonban snnek ellenkezőjére is: gondoljunk pl. a másodfoku egyenlet "többszörös gyökeire".

A megoldáet az jelenti, hogy azokat az elemeket, amelyeket több példányban szeretnénk ezerepeltetni egy halmazon belül, különböző indexekkel látjuk el: a fenti példánál maradva tehát az $\{a_1, a_2, b\}$ halmazt képezzük. Két dolgot szerstnénk elérni: egyrészt azt, hogy a_1 és a_2 lényegében ugyanazok lsgyenek, másrészt azt, hogy valamilyen módon (pl. az indexeikre való hivatkozáesal) mégis meg tudjuk különböztetni őket. Mindez a következő megoldást sugallja: képezzünk olyan párokat, amelyeknek első sleme a halmaz megkülönböztstésére, második eleme pedig azonositásukra szolgál.

Nyilván az első hslyre az indexst, a második helyre pedig magát a szóban forgó halmazt érdemes tenni: igy pl. a_i tehát (i,a)-ként fogható fel. Maga az indexbe irás azonban kifejezi, hogy e fslfogás nem teljesen mechanikus $a_1 \cup a_2$-t például nem $\cup\{(1,a),(2,a)\} = \{\{1\},\{2\},\{1,a\},\{2,a\}\}$-ként hanem egyszerüen $\{x \mid x \in a_1 \vee x \in a_2\}$ -ként fogjuk fel.

Általában ha a olyan halmaz, amelynek elemei halmazok (persze minden halmaz ilysn, de ezt nem mindig szükeéges hangsulyozni: a ezámokat vagy a tér pontjait pl. a legtöbb esetben egy alaphalmaz tovább már nem bontható elemeinek fogjuk fel.) akkor egy $f: I \to A$ függvényt az a elemei egy indexezésének tekinthetjük: ezt indokolja az a tény, hogy egy ilyen függvény definició szerint (i,a) alaku párokból álló halmaz, ahol $a \in A$.

E definició megfelel szándékainknak annyiban, hogy megengedi, hogy egy halmaz több indexhez is tartozzon, de nem engedi meg, hogy egy indexhez több mint egy halmaz tartozzon. (Miért nem?) Az is igaz, hogy minden indexhez tartozik halmaz, de az már nem, hogy minden halmaz szükségképpen el van látva indexszel. (Miért?)

Ha azonban ez is teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az indexelés teljes: a továbbiakban csupán a teljes indexelést nevezzük indexelésnek, minden egyéb esetben a részleges indexelés elnevezést használjuk. Egy halmazt megszámlálhatónak nevezünk, ha elemei ω -val indexelhetők; ezt az elnevezést az indokolja, hogy ilyenkor az index helyébe ω elemei, tehát természetes számok irhatók. Különleges fontossága miatt e definiciót kimondjuk úgy is hogy kiküszöböljük belőle az indexelés fogalmát:

Definició: egy a halmazt megszámlálhatónak nevezünk, ha van olyan f: $\omega \rightarrow$ a függvény, melyre $\forall x \quad x \in a \Rightarrow \exists y$ $y \in \omega$: $fy = x$

A gyakorlaton majd részletesen tárgyaljuk a tetszőleges indexhalmaz melletti egyesitést és metszetképzést: itt csupán annyit jegyzünk meg, hogy az $\bigcup_{i\in I} A_i$ jelölés analóg módon fog viselkedni az $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ jelöléssel - ez utóbbit a középiskolában tanult $\sum_{i=1}^{n} a_i$ jelöléssel állithatjuk párhuzamba. Speciálisan, ha az indexhalmaz ω, alkalmazni fogjuk az $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ jelölést is.

Az indexes jelölés mintegy 'mellékesen' azt is lehetővé teszi, hogy halmazrendszerek elemeiről is kényelmesen beszéljünk: a $\{a_i \mid i \in I\}$ halmazrendszer nem más, mint a $\{x \mid \exists i \; i \in I \wedge (i,x) \in f\}$ halmazrendszer röviditett irásmódja, ha f-et relációnak fogjuk fel, ill. a $\{x \mid \exists i \; i \in I \wedge f_i = x\}$

halmazrendszer rövidített jelölése (amennyiben f-et mint függvényt tekintjük).

Ezt a jelölést azonban általában akkor használjuk, ha az f indexelő függvény különböző indexekhez különböző halmazokat rendel: ellenkező esetben, tehát ha egyes elemek multiplicitással is előfordulhatnak, ismétléses halmazrendszerről beszélünk, és erre majd a jelölésben is felhivjuk a figyelmet.

Az indexelés azt is lehetővé teszi, hogy egy halmaz-(rendszer) elemeit elrendezzük: ehhez az indexhalmazon kell rendezési relációt definiálni. Páldaképpen megemlitjük, hogy egy $\{a_i \mid i \in \omega\}$ halmazrendszert (növekvő) láncnak nevezünk, ha $a_i \subseteq a_j$ teljesül minden $i \leq j$-re ($\leq$ itt a természetes számok között szokásos rendezés): erre a kérdésre a későbbiekben még visszatérünk.

Kötött tartományú kvantorok Még egy röviditési konvenciót kivánunk bevezetni: ugyanúgy ahogy a természetesm nyelven is meglehetősen kényelmetlen a 'mindenki,aki részeg .....' tipusu fogalmazás, a predikátumkalkulust is bizonyos mértékig nehézksssé teszi a $\forall x \quad x \in A \wedge \ldots$ tipusu jelölésmód. E helyett ugyanúgy ahogy a természstes nyelvben a 'minden részeg ...' beszédmódot részesitjük előnyben, a prsdikátumkalkulusban is meg fogjuk sngedni a $\forall x \in A$ u.n. kötött tartományú kvantorok használatát.

Megjegyzés: A természetss nyelvben kötött tartomány a tipikus: 'aki' általában emberre, 'ami' általában tárgyakra, 'ahol' általában helyre vonatkozik, stb. Bár a magyarban a valaki, valahol, valami (tkp exisztsnciális kvan -

torok) mellett nincs szigoruan párhuzamos univerzális kvantorrendszer: mindenki, mindenhol,* mindenmi ....,az angolban pl. teljee az

every	thing
some	where
	one

rendszer

(de ott is problémá+ okoz pl. sometimes * everytimes).

Részben ennek tudható be, hogy a formulákat igen sokféle módon kényszerülünk kiolvasni: $\forall$ -nek 'minden', 'bármely', 'tetszőleges' stb. felel meg, $\exists$ -nek pedig 'létezik', 'van olyan' stb.

Bár e téma mind nyelvészetileg, mind matematikailag rendkivül izgalmas, nincs módunk a természetes nyelvek kvantorhasználatának vizsgálatába bővebben belemenni: megemlitjük azonban, hogy pl. a magyarban a kvantoros kifejezéeek értelmezése függ a hangsulyviezonyoktól, v.ö. valamennyien eljöttek és valamennyien eljöttek.

A megszámlálhatóság definiciója kötött tartományu kvantoros felirásban jóval tömörebb lesz: egy halmaz megszámlálbató, ha: $\exists f: \omega \to a \ \forall x \in a \ \exists y \in \omega : fy = x$

E jelölésmód használata némi rutint igényel, különösen a "hogy" jelentésü kettőspont (:) elhelyezésére kell ügyelni. Gyakorláeképpen ajánljuk az olvasónak, hogy az R R függvények folytonosságának szokáeoe definicióját:

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

irja át olyan formára, amely nem tartalmaz kötött tartományu kvantort. Mi lenne a végeredmény az egyenletes folytonosság definiciója $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \ \forall x_0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ esetén?

A függvény, a müvelet, ée a természetes ezámok halmazelméleti keretbe történő illesztésével halmazelméleti tanulmányainkat lényegében befejeztük: a teljeseég kedvéért azonban még kitérünk arra a két axiómára, amelyeket eddig explicite nem mondtunk ki.

Már a második előadáeban (p 69) utaltunk arra, hogy minden tudományban vannak olyan halmazok, amelyeknek már nem foglalkozunk az elemeivel: ha tehát veszünk egy a_0 halmazt, ennek egy a_1 elemét, ennek egy a_2 elemét, stb.

$$\ldots a_4 \in a_3 \in a_2 \in a_1 \in a_0$$

akkor ez a folyamat valahol megakad (érdektelenné válik). Az u.n. <u>fundáltsági</u> (másnéven regularitási) axióma azt biztositja, hogy ez a halmazelméletben is igy legyen:

[ZF 13] $\forall x \neq \emptyset \ \exists y \in x\colon x \cap y = \emptyset$. 'Minden x halmaznak (ha nem üres) van olyan eleme, amelynek x-el nincsen közös eleme'. (Figyeljük meg a kötött tartományú kvantorok használatát!)

<u>Következmény</u>: $\forall x \quad x \notin x$

<u>Bizonyitás</u>: Minden x halmazhoz elkészithető a $\{x\}$ halmaz (páraxióma), ennek [ZF 13] értelmében van olyan eleme, hogy $y \cap \{x\} = \emptyset$. Esetünkben y kizárólag x lehet, azaz $x \cap \{x\} = \emptyset$, tehát $x \notin x$.

<u>Lemma</u>: Tekintsünk véges 'tartalmazkodó' láncokat, azaz tegyük fel, hogy $a_1 \in a_2 \in \ldots\ldots \in a_n$ ekkor $a_n \notin a_1$, azaz nincsenek $\in$ szerint 'körbeérő' láncok.

<u>Bizonyitás</u>: Tekintsük a $\{a_1 \ldots . a_n\} = c$ halmazt, és keressünk ebben a [ZF 13]-nak megfelelő y-elemet. y nyilván csak a_1, a_2, ... a_n közül kerülhet ki, de tudjuk hogy

$$a_1 \in a_2 \cap c \ , \ a_2 \in a_3 \cap c \ , \ a_3 \in a_4 \cap c \ , \ldots \ a_{n-1} \in a_n \cap c$$

hiszen olyan láncból indultunk ki, ahol $a_i \in a_{i+1}$ $(1 \leq i < n)$. Igy tehát a [ZF 13]-nak megfelelő y elem 'kizárásos alapon' egyedül a_1 lehet: $a_1 \cap c = \emptyset$, tehát $a_n \notin a_1$.

<u>Tétel</u>: Legyenek $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots$ olyan halmazok, hogy $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\}$ is halmaz* [Ezt a feltételt látszólag halmazok tetszőleges $a_1, a_2 \ldots$ sorozata teljesiti. Tekintve azonban, hogy a "...." (olvasd: "satöbbi") jelölésnek csak esetről esetre tudunk értelmet tulajdonitani (v.ö. $\{1, 3, 5, 7 \ldots\ldots\}$, $\{1, 4, 7, 10, \ldots\ldots\}$, ...), a 'satöbbit' mint definiciós módszert igénybe vevő eljárások nem szükségképpen vezetnek halmazhoz: később látni fogjuk, hogy még $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ halmaz sem definiálható egyértelmüen.

Semmiképpen sem áll mondunkban az itt felmerülő (az u.n. nem-standard halmazelmélet körébe tartozó) problémák részletezése, de megemlitjük, hogy az általunk definiált ω halmazt $\{0, 1, 2, 3 \ldots\ldots\}$ nem szükségképpen meriti ki. Mi a továbbiakban feltesszük, hogy $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\ldots\}$ azaz, az u.n. standard halmazelmélet keretein belül maradunk.] ekkor $a_1 \ni a_2 \ni a_3 \ni \ldots\ldots$ nem fordulhat elő, azaz létezik olyan n, hogy $a_{n+1} \notin a_n$.

<u>Bizonyitás</u>: Indirekt uton okoskodunk: feltesszük, hogy a fenti példa mégis "végtelen, $\in$ szerint leszálló lánc". Ebben az esetben $a_{n+1} \in a_n \cap \{a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\}$, tehát semmilyen i-re nem lesz $\emptyset = a_i \cap \{a_1, a_2, \ldots\}$ (hiszen a_{i+1} benne van ebben a metszetben). De akkor $\{a_1, a_2, \ldots\ldots\}$ semmelyik eleme nem lehet a [ZF 13] által megkövetelt y-nal halmaz: ez ellentmondás.

Látható, hogy a regularitási axióma igen kellemes következményekkel jár: pl. két halmaz nem lehet eleme egymásnak (Miért?), de felhivjuk rá a figyelmet, hogy ω előállitásában és tulajdonságainak igazolására ezt az axiómát nem használtuk fel, és a továbbiakban sem lesz különös szükségünk erre az axiómára.

Nem igy káll a helyzet a kiválasztási axiómával, amelynek a továbbiakban még számtalanszor hasznát vesszük:

[ZF 11] Ha $s = \{a_i \mid i \in I\}$ tetszőleges (esetleg ismétléses) halmazrendszer, akkor létezik olyan $f: I \to \bigcup s$ függvény, melyre $fi \in a_i$ minden $i \in I$-re teljesül.

Ez az állitás szinte magától értetődő, ha az I indexhalmaz véges: ebben az esetben a célnak megfelelő f függvény [ZF 11] feltételezése nélkül ie megkonstruálható. Az ilyesfajta explicit konstrukciós módszer mellett a matematika elfogadott konstrukciós lmódszere az u.n. rekurzióval történő definició is, amellyel a továbbiakban még sokezor találkozunk - itt csupán egy páldát hozunk.

Példa: legyen $f(0)=0$, $f(1)=1$ és $f(i+1)=f(i)+f(i-1)$ (mivel itt nem merül fel az egyváltozós relációkkal való összetéveszthetőség veszélye, kitesszük a zárójeleket annak ellenére, hogy itt függvényről van szó).

ekkor $f(2)=1$, $f(3)=2$, $f(4)=3$ $f(5)=5$ $f(6)=8$ .....

$f(n)$-t az n-edik Fibonacci számnak nevezzük, ée f_n-nel is jelöljük.

Ilyesfajta rekurzió igénybevételével általában megezámlálható indexhalmazhoz is konstruálható a [ZF 11] által megkövetelt u.n. kiválasztási függvény, lés van a matematikának egy olyan iránya, az u.n. intuicionizmus, amely nem fogadja el a [ZF 11]-en alapuló existenciabizonyitásokat, hanem minden esetben ragaszkodik a kérdéses tulajdonságu halmaz megkonstruálásához. Nem kivánunk itt részletesebben belemenni abba, hogy mit fogadhatunk el 'konstrukció'-nak, de megjegyezzük, hogy az intuicionista iskola is megengedi a többi [ZF] acióma (igy pl. a hatványhalmaz vagy páraxióma) alkalmazását bármiféle konstrukció során. Nekünk a továbbiakban általában csak a kiválasztási axióma u.n. megszámlálható változatára lesz szükségünk:

[ZF 11] : ha s= a_i i tetszőleges halmazrendszer, akkor

5. Előadás: Rendezés, háló

Bár az előző előadásokon meglehetősen távolra kerültünk a konkrét problémák megoldási tschnikáitól, az 'absztrakt' gondolkodás területén kifejtett erőfeszitéseink nem voltak teljesen hiábavalóak, mivel mostanra már rendelkezésünkre áll egy olyan logikai nyelv, és a vele összekapceolódó halmazelméleti ontológia, amelynek segitségével a matematika egész fegyvertárát bevethetjük a felmerülő konkrét problémák megoldásában.

A kérdés, amivel foglalkozni kivánunk, a mérés pontosabban az összehasonlitás problémája. Az slső lépésben általában csupán egy rendkivül durva megkülönböztetést alkalmazunk: azt mondjuk, hogy a dolgok "T" tulajdoneáguak vagy nem. Igy tehát a dolgokat két kupacba soroljuk: az egyikben a T tulajdonságu dolgok vannak a másikban a többi. Eddigi előtanulmányaink alapján nagyobb kockázat nélkül mondhatjuk, hogy a T tulajdonság terjedelme egy halmaz: ennek komplementumában van a többi dolog. Előrs tisztáznunk kell természetesen, hogy mit tekintünk alaphalmaznak, azaz mik azok a dolgok, amikre nézve a fenti tulajdonság egyáltalán értelmes. Mint már emlitettük, elég sok halmaz van: igy hát nem jár tul nagy kockázattal feltételezni, hogy az 'alaphalmaz' valóban halmaz a szó Zermelo-Fraenkel értelmében.

Lássunk egy konkrét példát: ha a T tulajdonság = "férfi", akkor alaphalmaznak nyugodtan válaszhatjuk a jelenleg élő emberek halmazát (ez, véges lévén, biztosan halmaz), és ebben a T tulajdonság terjedelmét alkotó f halmaz komplementuma nyilván a nőkből álló n halmaz lesz.

A matematikai tulajdonságoktól eltérően, a gyakorlati életben vagy akár a természettudományokban fellépő tulajdonság -halmazok határai a legritkábban élesek: általában adódnak olyan esetek, ahol nem tudjuk világosan eldönteni, hogy az illető egyed bir e a T tulajdonsággal vagy sem. Az iménti példánál maradva mindenki tudja, hogy vannak hermafroditák, és még ha ezeket külön osztályba sorolnánk is, akkor is lesznek him- illetve nő-jellegü hermafroditák,stb.

A következő lépésben tehát egy összehasonlitást vezetünk be, vagy ami ugyanaz,áttérünk egy egyváltozós relációról egy kétváltozósra: azt mondjuk, hogy pl. az egyik ember 'férfiasabb mint' a másik. Az ilyen relációk szükségképpen tranzitivak: feltehető tehát, hogy valamiféle rendezésről van szó.

Igen gyakran még egy lépéssel tovább megyünk és a kérdéses jellemző <u>mennyiségéről</u> beszélünk (számszerüsitjük a kérdéses fogalmat): a példánknál maradva nyilván a nemi kromoszómák számát és arányát kell tekintetbe venni.

A fizika legtöbb fogalma (hőmérséklet, tömeg, stb.) valószinüleg átment a folyamat legtöbb állomásán (bár az előzményeket gyakran csak a nyelvhasználat törvényszerüségeiből lehet kikövetkeztetni): mi a továbbiakban <u>klasszifikációs</u>, <u>összehasonlitó</u>, és <u>mennyiségi</u> jellegü koncepciókról beszélünk.* [Az utolsó két fokozatra gyakran használják az ordinális és kardinális összehasonlitás elnevezéseket is: a mi terminológiánk Rudolf Carnap-tól származik (Carnap, 1950).]

A mennyiségi koncepciók általában igen hasznosan (különösen akkor, ha világos mérési eljárás társul hozzájuk), mivel a számszerü adatokkal sokkal jobban lehet dolgozni, mint puszta rendezésekkel, vagy egyszerü besorolással. Éppen ezért gyakran számszerüsitenek olyan fogalmakat is, amelyek mérése enyhén szólva gondokba ütközik: jó példa erre az intelligenoia, amely a legtöbb ember szemébsn csak igen kevéssbé azonositható az intelligenciahányagos (IQ) különböző intelligencia-tesztek által kimutatott értékével.

A probléma tehát, amsllyel foglalkozni kivánunk,a következő: ha adott egy klasszifikációs fogalom, milysn fsltételsk mellett lehet ezt számszsrüsitsni (mennyiségi változatát kidolgozni),és amennyiben a számszsrüsités akadályokba ütközik, van e valamiféls közbenső megoldás, amely a durva osztályozásnál mégis többet ad. (Különösen égstő sz a probléma a humán tudományokban, ahol a hétköznapi nyelvből származó jelzőket ('szép', 'haladó', 'okos') minden különösebb óvatosság nélkül használják, és a szabatosságra való töreksdésnsk általában nyoma sincs.)*[Ezek után nem túl meglspő, hogy a humán tudományokban a tudósok idejük jelsntős részét olyan vitákra fecsérlik, amelyek egymás meg nem értéséből származnak: a puszta szófacsaráson alapuló "cáfolatok"-nak és "ellenbizonyitások"-nak se szeri se száma.]

Induljunk ki abból a fsltevésből, hogy meg lehst adni klasszifikációnk számszsrüsitstt változatát, azaz elkészithető f: U → R függvény (U az alaphalmazt jelöli) oly módon, hogy a növekvő függvényértékek annak felelnek meg, hogy a szóban forgó T tulajdonság egyre nagyobb mértékben van jslen. Egy ilyen függvényből, egy küszönérték alkalmas megválasztásával az sredeti klasszifikáció nagyjából visszaállitható (Hogyan?).

Mi több, elkéezithetjük f-hől a fogalom összehaeonli-tó jellegü lmegfelelőjét is: azt mondjuk, hogy x 'inkább T tulajdonságu' mint y, ha $f(x) > f(y)$, és 'ugyanannyira T tulajdonságu', ha $f(x)=f(y)$. Ennek a rendezésnek meg van az a tulajdonsága, hogy teljes (trichotóm): $\forall x \forall y$ x 'T-hb mint' y; x 'ugyanannyira T mint' y; x 'kevésbé T mint' y közül pontosan az egyik teljesül, hiszen $f(x) > f(y)$, $f(x)=f(y)$ és $f(x) < f(y)$ közül is pontosan az egyik fog teljeeülni. Igy tehát a számezerüsitésnek szükséges feltétele az, hogy a kiinduló fogalomhól képzett öseze-hasonlitó reláció teljes legyen. Ez a feltétel lényegében elégségse is: a gyakorlaton részletesen megtárgyaljuk, hogy hogyan kell ezámszerüeiteni egy tulajdonságot, és hogy mikor érdemes.*[A lényegében itt azt jelenti , hogy a szó-hanforgó halmaz (számossága) nem tul nagy: mi itt és álta-láhan olyan halmazokkal foglalkozunk, amelyeknek elemei egy-sgy megfeleltetésbe hozható a ezámegyenee egy rész-halmazával.]

Lássunk egy példát: az alaphalmaz legyen az emherek halmaza, és a fogalom pedig 'jó detektivregényiró'. Rögtön látható, hogy két iró nem feltétlenül összehasonlitható: lehet, hogy pl. az egyik ravaezabban épiti fel a törté-netet, de a máeik kevésbé irreális figurákat szerepeltet. Hasonló a helyzet az okossággal, ha a szót a hétköznapi értelemhen használjuk - a példák a végteleneégig ezaporit-hatók.

Az ilyesfajta relációkat nyilván nem lehet mennyieégi mutatóvá átalakitani: ez azonban nem jelenti azt, hogy ezek semmiféle strukturával nem hirhatnak. Vizsgáljuk meg réezletesebben ezt az esetet: adott egy U alaphalmaz, és azon egy tranzitiv, de nem feltétlenül trichotóm reláció. Ha e reláció szigoru ($<$ tipusu) akkor kiegészitjük a Descartes-szórzat átlójával, azaz a továbbiakban a reflexiv és tranzitiv relációkat (részbenrendezéseket) vizsgáljuk.

A technikai nehézségek elkerülése érdekében nem különböztetjük meg az olyan elemeket, amelyek egyezerre $a \leq b$-t és $b \leq a$-t teljesitik. Szabatosabban fogalmazva bevezetjük a következő ekvivalenciarelációt: $a \sim b \Leftrightarrow a \leq b \wedge b \leq a$ (igazoljuk, hogy $\sim$ reflexiv, szimmetrikus és tranzitiv!) majd tekintjük az ez által meghatározott ekvivalenciaosztályokat. (Mik ezek az osztályok, ha $\leq$ egy $<$ tipusu relációból az átló hozzáadásával keletkezett?) Ezeken az osztályokon belül az elemeket a továbbiakban nem különböztetjük meg: az alaphalmaz helyett az annak ekvivalenciaosztályaiból álló halmazt (később megindoklandó terminológiával az $V/_\sim$ u.n. faktorhalmazt) vizsgáljuk. Ennek lemei között is értelmezhető a $\leq$ reláció (pontosabban annak $\leq/_\sim$ u.n. faktora) a következőképpen:

$x \leq/_\sim y \Leftrightarrow \exists u \in x \wedge \exists v \in y$ hogy az eredeti halmazban $u \leq v$

E definicó értelmes, mert nem függ attól, hogy a szóbanforgó x és y ekvivalenciaosztályoknak mely elemeit vettük (Miért?), és a keletkező $\leq/_\sim$ reláció is reflexiv és tranzitiv (Miért?), de nem feltétlenül trichotóm. Mi több, $\leq/_\sim$ antiszimmetrikus, ha $a \leq/_\sim b$ és $b \leq/_\sim a$, akkor $a = b$ is (és nem csupán $a \sim b$) fennáll. (Miért?)

A továbbiakban tehát elegendő reflexiv, tranzitiv és antiszimmetrikus relációkkal, röviden részbenrendezésekkel foglalkoznunk. (Miért?) A kényelmesebb beszédmód kedvéért jelölést vezetünk be az ilyen relációk komplementumára is:

erre a célra a párhuzamosság jele ($\|$, olv. összehaeonlithatatlan) ezolgál. Igy tehát réezbenrendezésnél minden elempárra $a \leq b$, $a \geq b$ és $a \| b$ valamenyike biztosan teljeeül, és kettő ezek közül csupán a = b eeetén állhat. Mindez indokolja, hogy szükség esetén tekintsük a $\leq$ -ből az átló elhagyásával keletkező $<$ relációt ie: hansulyozzuk azonban, hogy $a \nleq b$-ből még nem következik $a > b$. (Hogyan festenek az eddig leirtak abban az esetben, ha $<$ tipusu relációból indulunk, faktorizálunk, majd ismét áttérünk $<$ tipusu relációra?)

Példa: Legyen U az egynél nagyobb természetetee számok halmaza ée legyen $a \leq b \Leftrightarrow \exists c : ac = b$ (azaz tekintsük a $(|)$ u.n. oszthatósági relációt). Ebben a halmazban $2 \nleq 3$, de $2 > 3$ eem teljesül, mivel $2 \| 3$.

Részbenrendszett halmazokban lehet több olyan elem is, aminél nincsen nagyobb: ezeket maximális slemeknek hivjuk. (Az olyan elemeket, amelyeknél kissbb elem nincsen, minimális elemnsk hivjuk). Az előző példában mindsn primszám minimális elem, de nem létezik maximális elem. Két minimális elem nem lehet egymáesal összehasonlitható (Miért?) és psrsze ugyanez áll maximálie elemekre is. Ha egy elem minden elemmel összehasonlitható, és minden elemnél $\leq$ akkor legkieebb elemnek nsvezzük: hasonló módon definiáljuk a legnagyobb elemet is. (Hány legnagyobb elem lehet egy részbenrendezett halmazban /rrh-ban/? Hány maximálie slem lehet egy rrh-ban, ha van benne legnagyobb elem? és hány minimális?)

Példa: tegyük fel, hogy minden embernek van egy u.n. preferenciarendezéee , amely meghatározza, hogy az illető a világ két állapota közül melyiket részeeiti előnyben. (Ha ez a preferenciarendezés számszerüsithető, akkor jóléti függvénynek hivjuk.) Minden ember olyan állapot elérésére törekszik, amely preferenciarendezéeében a legelőkelőbb helyen áll (jóléti függvényét maximalizálja). A gyakorlatban azonban azok az állapotok, amelyek egyeseknek kedveznek, másoknak hátrányosak szoktak lenni: igen valószinütlen, hogy valamely állapot minden egyén számára optimális legyen. Ha mégis létezik ilyen állapot, azt a társadalom ideális állapotának nevezzük: az öesztársadalmi preferanciarendezésnek ez az elem (ha létezik) a legnagyobb eleme.

Reálisabb feltevések mellett eokkal fontosabb ennél azoknak az eeeteknek a vizegálata, amelyek az össztársadalmi rendezéeben maximálisak: Pareto-optimumnak nevezünk egy olyan állapotot, amelyben senki nem kerülhet jobb helyzetbe anélkül, hogy mások helyzetét rontaná . *[Azzal a kérdéseel, hogy az egyéni preferenciarendezésekre, ill. jóléti függvényekre tett bizonyos kikötéeek mellett a Pareto-optimális helyzetek hogyan kereshetők meg, az u.n. jóléti közgazdaságtan (welfare economics) foglalkozik: az érdeklődőknek Arrow-Scitovsky (1969) szöveggyüjteményét ajánljuk.]

E definició pontosabban is kimondható hasznossági függvények feltételezése mellett: tegyük fel, hogy a táreadalomnak n tagja van, és az i-dik tag a o állapotot $u_i(o)$ hasznosságunak itéli. Pareto-optimálisnak nevezünk egy c állapotot, ha $\sum_i u_i(c)$ nem növelhető anélkül, hogy közben valamelyiku u_i ne csökkenjen, és optimálisnak, ha $\sum_i u_i(c) \geq \sum_i u_i(d)$ minden d állapotra teljesül.

Egy Pareto-optimális állapot nem feltételneül optımális, ée elképzebető, hogy a öesztáreedalmi jóléti függvény egyes emberek kárára növelhető.

Egy d állapotot Rawls értelemben igazságosnak nevezünk, ha min $u_i(d)$ maximális, ezaz, ha a táreadalom legrosszab helyzetü tagjának jóléti függvénye van maximalizálve. (Miért 'igazságos' egy ilyen állapot?)

[Innentől kedzve az előadás lényegében Fuche Algebráját követi (mi az 1977-es kiadásra hivatkozunk) ée az alábbiakban ceak az ott leirtaktól való eltéréseket soroljuk fel, ée itt csupán cimszavakat adunk].

fedés fogalma (162 p.) hálódiagrammok

legkisebb feleő korlát, lnak, ezek egyértelmüsége (163 p.) Ajánlatosnak tartjuk ezekre a $\vee$ és $\wedge$ jeleket használni (tehát nem $\cup$ és $\cap$!)

hálók definiciója müveletekksl ill. réezbenrendezéesel, ezek ekvivalsnciája (164-165)

dualitás, számoláei ezabályok, részhálók (166)

bomomorfizmue, izomorfizmus, sgyséégelem, nullelem (167)

A hálókkal azért foglalkozunk ilyen részletssen, msrt ezek ezolgáltatják (ugy véljük) az óra elsején kitüzött problé - ma megoldását: azt állitjuk, hogy egy klaeezifikációs fogalom (pl. 'okoe') továbbfejleeztéeéből ezármazó ösezehaeonlitó koncepcióhoz ('okosabb') az esetek nagy részében nem csupán egy részbenrendezési relációt, hanem egy hálót ie tudunk rendelni. Miért van ez? Maradjunk az intelligencia példájánál.

Két ember intsllıgenciájának összehasonlitáea általábana azért ütközik nehézségekbe, mert az intelligencia soktényezős fogalom: szerepet játszik benne a verbális készség, a memória, a kreativitás stb., stb.

Ha ezeket külön-külön tekintjük, akkor elképzelhető, hogy az egyik ember az egyik tényezőben felülmúlja a másikat, mig a másikban alul marad: csak akkor mondhatnánk nyugodtan, hogy 'k okosabb p-nél', ha az intelligenciát meghatározó összee tényezőben k $\geq$ p, és legalább egyben k $>$ p is igaz.

Ugy tünhet, hogy ez a megfigyelésünk semmivel sem visz közelebb a probléma megoldásához, hiszen minek alapján mondjuk, hogy pl. 'k-nak jobb a memóriája mint p-nek'? A memória is soktényeszős tulajdonság: köztudott, hogy olyan összetevői mint pl. a számmemória, névmemória, arcmemória igen kevéssé mozognak együtt: ugyansz elmondható pl. a hang- és képi memóriáról is. Sőt mégha egy tényezőre, pl. a számmemóriára koncentrálunk, akkor is előfordulhat, hogy az u.n. rövid-, közép- ill. hosszutávu emlékezés szempontjából egészen másképp viselkedő embereket találunk: k-nak kiváló a rövid- és középtávu számmemóriája, de hosszutávon pocsék, p-nek pedig forditva. Ha ez a folyamat igy menne a végtelenségig, akkor természetesen nem is tudnánk a részbenrendszés fogalmán tulmenni: azt állitjuk azonban, hogy a gyakorlatban a folyamat előbb-utóbb megakad - eljutunk olyan tényezőkig amelyek szempontjából már bármely két egyed összehasonlitható (az intelligenciának egy ilyen tényezője pl. a rövidtávu számmemória). * [Ezzel a kérdéssel bővebben az u.n. kisérleti pszichológia foglalkozik: az érdeklődőknek Piaget, Fraise, Reuchlin (1967) müvét ajánljuk].

Ha tehát a vizsgálandó fogalmat sikerül olyan elemeire bontani, amelyekre nézve már bármely két egyed össze-hasonlitható, akkor a végső rendezést ezek a láncok már meghatározzák. (Hogyan?)

Hangsulyozzuk, hogy nem állitjuk, hogy a humán tudományok területén megjelenő összehasonlitó koncepciók, mint rendezések hálószerüek, hanem csupán annyit, hogy ezek beágyazhatók hálóba, pontosabban (később megindoklandó terminológiával) láncok direkt szorzatába.

Ha adottak az $L_1, \ldots, L_n$ láncok, akkor a $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} L_i$ halmazon azt mondjuk, hogy $(a_1, \ldots, a_n) \leq (b_1, \ldots, b_n)$, ha $a_i \leq_i b_i$ $\forall$ i-re, ($\leq_i$ az i-edik lánc rendezését jelenti). Az ilymódon definiált rendezés nyilván háló:

$$(a_1, \ldots, a_n) \wedge (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 \wedge b_1, \ldots, a_n \wedge b_n) = (\min(a_1, b_1), \ldots, \min(a_n, b_n))$$

és hasonlóan unióra

$$(a_1, \ldots a_n) \vee (b_1, \ldots b_n) = (a_1 \vee b_1, \ldots a_n \vee b_n) = (\max(a_1, b_1), \ldots, \max(a_n, b_n))$$

Az olvasóra bizzuk az asszociativitás, kommutativitás, idempotencia, és elnyelési tulajdonság leellenőrzését.

Mi több, az ilyen hálók nyilván disztributivak, azaz $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ illetve $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$

Nem véletlen, hogy az összehasonlitó jellegü koncepcióknak 'egy az egyben' megfelelő parciális rendezések helyett e koncepcióknak disztributiv hálókat igyekszünk megfeleltetni: mig ugyanis a parciális rendezésekről lényegében semmi hasznosat nem lehet elmondani, a disztributiv hálók viselkedése (mint azt a következő előadásban látni fogjuk) matematikailag igen jól leirható.

6. Előadás: Disztributiv hálók, Boole-algebrák

Nem minden rrh-nak van legnagyobb eleme, sőt könnyü példát hozni olyan rrh-ra, amelyiknek maximális eleme sincs: ilyen pl. a természetes számok N halmaza a szokásos $\leq$ rendezésre nézve. Ez a halmaz egy lánc: világos tehát, hogy maximális elem létezéséhez haeznos , ha a halmaz minden lánca tartalmaz maximális elemet. A hires Zorn-lemma azt mondja ki, hogy ez a feltétel elégséges:

Tétel: A kiválasztási axiómából következik, hogy minden olyan részbenrendezett halmaznak van maximális eleme, amelben minden lánc tartalmaz maximális elemet.

Bizonyitáe: Lásd Halmos-Ziegler (1981) 64-66.p.

Megjegyzés: A Zorn-lemma valójában ekvivalens a kiválasztási axiómával: abból a feltsvésből kiindulva, hogy a lemma konkluziója teljesül, be lehet bizonyitani, a premisszát, azaz a kiválasztási axióma által megkövetelet függvény létezéeét - erről bővebben ld. a gyakorlaton.

A bizonyitás azon a meglepő észrevételen alapult, hogy minden részbenrendezést helyettesithettünk halmazok tartalmazásra vett részbenrendezéeével: felmerül a kérdés, hogy igaz-e haeonló állitás hálók között is. Eddig nem emlitettük, hogy a halmazelméleti $\vee$ és $\wedge$ müveletek szigoru párhuzamba állithatók a hálóelméleti $\cup$ és $\cap$ müveletekkel - az axiómák teljesülését azonban tulajdonképpen már a második gyakorlaton ellenőriztük. Tekintve, hogy a halmazokból ilymódon keletkező hálók (az u.n. halmazhálók) ezükségképpen dieztributivak, nem remélhető, hogy pl.  vagy  is halmazhálóval lesz egyenértékü, (miért?), de kimondható a hiree

<u>Stone-féle reprezentációs tétel</u>: tetszőleges disztributiv háló izomorf egy halmazhálóval.

A bizonyitáshoz azonban meg kell ismerkedünk a hálóelmélet két alapvető fogalmával, az <u>ideállal</u> és a <u>filterrel</u> (szürővel). [Innentől kezdve a tárgyalás ismét Fuchs Algebráját (1977) követi.]

179-182. p.: ismeretetésre kerül az ideál, főideál, maximális ideál és primideál fogalma (ill. ezek duálisai) belátjuk, hogy I primideál $\Leftrightarrow$ L $\setminus$ I (ultra)filter, és hogy bármely két elem elválasztható primideállal. Ezek után kerül sor a tétel bizonyitására (187-188) és jelentőségének ecsetelésére.

A halmazhálókban természetesen bevezethető a komplementum fogalma: ez adja az ürügyet a Boole-algebrák definiciójához. Belátjuk, hogy disztributiv hálókban a komplementum (ha létezik) egyértelmü, és teljesiti a De Morgan-azonosságokat (183). Az óra befejezéseképpen a Stone-tételt Boole-algebrákra is bebizonyitjuk (188).

<u>7. Előadás: Kiejelentéskalkulus</u>

Ismertetjük a kijelentéskalkulus szintaxisát (a lengyel és ferditott lengyel jelölésmódot is), és definiáljuk az n kijelentéssel generált szóalgebrát: megemlitjük, hogy ez példa szabad Boole-algebrára. A logikai konnektivumok müvelet-jellegét hangsulyozva ismertetjük a szokásos konnektivumokat: különösen fontosnak tartjuk az implikáció és az okság viszonyára való kitérést. Ezek után egyre bővebb ekvivalenciarelációkat vezetünk be a szóalgebrába (először csak $s \vee t \equiv t \vee s$, és az ez által kikényszeritett osztályok, stb.), addig amig el nem jutunk az 'akkor és csak akkor' jellegü ekvivalenciáig.

Részletesen megtárgyaljuk, hogy miképpen lehet az ilyen ekvivalenciát két szó között megállapitani: megmutatjuk ennek kapcsolatát a (modus ponens-t használó) bizonyitással. Bevezetjük a modell (tetszőleges Boole-algebra) és az interpretáció (homomorfizmus) fogalmát: ismertetjük ugyane fogalmakat az elsőrendü predikátumkalkulusra is.

Foglalkozunk az axiómarendszer által generált szürő, ill. az e szerinti faktor vizsgálatával is. Ez a tárgyalás lényegében Halmos (1956) nyomán halad, természeteeen poliadikus algebrákról nem beszélünk. Részletesen kitérünk azonban a szintaxis és a szemantika kapcsolatára és bebizonyitjuk a kijelentéskalkulus teljességi tételét: e tétel ekvivalens formáit (természetesen bizonyitás nélkül) kimondhatjuk a predikátumkalkulus esetében is.

Ennél az anyagrésznél különösen előnyösnek érezzük, ha mindent amit csak lehet a hallgatóság maga fedez fel: éppen ezért azt javasoljuk, hogy a rendelkezésre álló három óra most az elejétől gyakorlat jellegü legyen, és az előadó lehetőleg minél kevésbé menjen túl a hallgatóság vezetésén.

Megjegyzés: Ennek az előadásnak a lehetséges menetét nagyban befolyásolja, hogy a hallgatóság mennyire kezeli rutinosan az eddig megismert formalizmust. (Reméljük, hogy a minden gyakorlat végén iratott röpdolgozatok erről elég világos képet fognak adni). Amennyiben a hallgatóság kellő matematikai érettségről tesz tanubizonyságot, akkor a kevésbé szigoru tárgyalásmód is megengedhető: ellenkező esetben meg kell elégednünk a fent leirt anyagból csupán annyinak az ismertetésével, amennyi a rendelkezésre álló idő alatt teljes ezabatossággal leadható.

(8.Előadás: A magasabbrendü predikátumkalkulus

Az előadáson ismertetésre kerülnek a magasabbrendü nyelvek és strukturák, a hozzájuk kapcsolódó tipuselmélettel egyetemben. A tárgyalás Robinson (1974) 2.6-2.7 pontjait követi.)

Hangeulyozzuk, hogy a 8. előadás (ée minden negyedév záróelőadása) tartalékelőadás: ez az anyagrész minden károe következmény nélkül elhagyható, ha bármilyen lemaradáe van a tantervhez képest, de akár nagyobbszabásu zárthelyi dolgozat kedvéért is.

Amennyiben bármelyik előadáson fennáll a veszélye, hogy a hallgatóságot elveszitjük, a tartalékelőadáeok a haladáe ütemének mérséklése érdekében akár előre felálдozhatók, bár a negyedév-határokat kivánatoenak tartjuk megőrizni. Mindez nem jelenti azt, hogy a tartalékelőadások lényegtelenek: véleményünk szerint az ideutalt anyagréezek ismertetése rendkivül hasznoe, feltéve hogy a hallgatóság a többi anyagot rendesen érti.

2.2 Második negyedév: Struktúrák

1. Előadás: Metrikus terek

Kimondjuk a (standard) valós számokat jellemző axiómákat, abban a formában, ahogy azt Benkő (1975) 0.3a (231-232) összefoglalja: hangsulyozzuk, hogy $\mathbb{R}$-ben minden korlátos ideál főideál, vagy egy elem hozzávételével azzá tehető. Korlátos esetben ezáltal definiáljuk valós számhalmaz infimumát és supremumát, de nem vezetjük be a $-\infty$ és $+\infty$ 'improprius' elemeket.

Ezután a távolság fogalmával foglalkozunk: a metrikus terek bevezetésével mennyiségi értelmezést adunk a távolság koncepciójának. Már itt megemlitjük, hogy a második félévben 1) a valós számok axiómáinak eleget tevő halmaz létezését (konstruktuv úton) be fogjuk bizonyitani, 2) a távolság fogalmának klasszifikációs értelmezését is szabatosan meg fogjuk adni: * [Nincs módunk a távolság fogalmának összehasonlitó értelmezését is adni, bár kétségtelen, hogy az uniform terek ilymódon könnyen interpretálhatóak lennének.] két szám közeli, ha különbségük infinitézimális.

Mugmutatjuk, hogy a számegyenes $|x-y|$ -re nézve metrikus tér, és definiáljuk a diszkrét metrikát is. Különösen fontosnak tartjuk, hogy a tárgyalást már az előadáson igen sok példa kisérje: ezek közül is kiemeljük a Hamming távolságot és a $\rho_\infty(f,g) = \sup_{x\in M} |f(x)-g(x)|$ Csebisev távolságot.

Ezek után bevezetjük az n dimenziós Euklidesz-i teret (egyelőre csupán mint szám-n-esek halmazát), és belátjuk, hogy ott az euklideszi távolság valóban eleget tesz az axiómáknak. (Már itt megpróbálhatjuk bevezetni a vektoriális jelölésmód konvencióit, de ezt csak akkor ajánljuk, ha előre látható, hogy a gyakorlaton ennek gyakorlására is lesz mód.) Definiáljuk a ρ_1 és ρ_∞ távolságokat is euklideszi térben: ezek segitségével illusztráljuk a gömbi környezet fogalmát.

Definiáljuk a metrikus terek különféle morfizmusait és belátjuk, hogy a folytonos leképezések $C(\mathbb{R}^n_i, \mathbb{R}^m_j)$ halmaza nem függ attól, hogy i, j = 1, 2, vagy ∞ .

Belátjuk továbbá, hogy a folytonosság csupán a kis ε-októl függ, azaz a min(ρ ,1) metrikára vett folytonos függvények egybeesnek a ρ -ra vett folytonos függvényekkel. Ezek után definiáljuk metrikus terek altereit, és (véges esetben) direkt szorzatát is.

Definiáljuk egy halmaz külső, belső,és határpontját, ismertetjük a nyilt és zárt halmazok alapvető tulajdonságait, továbbá belátjuk, hogy metrikus térben teljesülnek a Kuratowski axiómák.

2.Előadás: Analizis

(Hasznosnak itéljük, ha ezt az előadást az analizis ágairól, szerepéről és történetéről szóló rövid ismertetés vezeti be.) Megadjuk a sorozatok konvergens ill. Cauchy voltának definicióját metrikus terekben, és belátjuk, hogy konvergens $\Rightarrow$ Cauchy mindig igaz. Ismertetjük a zárt halmazokra ill. folytonos függvényekre vonatkozó átviteli elvet majd rátérünk az $\mathbb{R}^n$-beli sorozatok vizsgálatára.

Definiáljuk ilyenek összegét, szorzatát etb., majd igazoljuk, hogy egy $\mathbb{R}^n$-ben Cauchy sorozat koordinátánként is Cauchy, és viszont. Belátjuk, hogy $\mathbb{R}$-n zárt skatulyázott intervallumok metszete nem üres, és ebből nyerjük, hogy $\mathbb{R}$ teljes, így $\mathbb{R}^n$ is az. Belátjuk, hogy $\mathbb{R}^n$-en érvényes a Bolzano-Weierstrass tétel, és ezt felhasználjuk annak az igazolására, hogy $\mathbb{R}^n$ korlátos, zárt részén értelmezett (valós értékü) folytonos függvény értékkészlete zárt. Ebből már adódik Weierstrass tétele és itt igazoljuk Bolzano tételét is. Definiáljuk az $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvények deriváltját, és igazoljuk, hogy zárt intervallumon folytonos függvényekre érvényes a következő 'kritikus pont' tétel: ha f(c) extremális, akkor c vagy az intervallum végpontja vagy f'(c) nem definiált vagy f'(c)=0.

Amennyiben az idő megengedi, igen hasznosnak látjuk zárt intervallumok folytonos, de sehol sem differenciálható függvény létezésének igazolását is. Ez három lépésben történhet: 1) Baire-féle kategróia-tétel, 2) zárt intervallumon folytonos függvény egyenletesen folytonos, és az ilyenek ρ_∞-re teljes teret alkotnak, 3) Mazurkiewicz-Banach tétele (azon függvények A_n halmaza, amelyeknek legalább egy pontban n-nel majorálhatók a különbségi hányadosai, sürü komplementummal bir az előző térben).

Megjegyzés: Az első két lépés elvégzését akkor is igen hasznosnak itéljük, ha a harmadikra már nem kerülhet sor: amennyiben csak egy tétel igazolására van mód, az előadóra bizzük, hogy az 1) vagy 2) legyen.

3. Előadás: Strukturák

Először a csoport fogalmával ismertetjük meg a hallgatókat: az illusztrációként felhasznált (lehetőleg igen bőséges) példaanyag között lehetőleg szerepeljenek mátrix--csoportok is. Ezután kerülhet sor az egyváltozós és 0-változós (és általában n-változós) müveletek definiálására, és már itt értelmezzük a külső müvelet fogalmát is. Definiáljuk a kommutativitást és az asszociativitást, és bevezetjük az algebrai strukturák morfizmusait is. Ezután kerülhet sor a monoid fogalmának ismertetésére: a hozott példák között szerepelje (egyenlőre csoport) endomorfizmus-monoidja, és szabad monoid is.

Az általános struktura-fogalom ismertetése után definiáljuk a részstruktura és a kongruenciareláció fogalmát: itt kerülnek ismertetésre a faktorstrukturák és a homomorfia-tétel is. A gyürü és a test fogalmának ismertetése után az eddig megismert strukturákban való számolás szabályait gyakoroljuk: itt kerül sor a normális részstruktura definiálására is.

Ezek után a (külső) direkt szorzat definicióját adjuk, majd definiáljuk a szokásos kisérőstrukturákat (End, Aut, Con, Sub). Az előadás hátralevő részében ezek alaptulajdonságait látjuk be: az óra a topológiai és algebrai lezárási rendszerek összehasonlitásában kulminál.

<u>Megjegyzés</u>: Fontosnak tartjuk, hogy az előadásban bevezetésre kerülő strukturatipusok ne <u>ad hoc</u> módon kerüljenek bevezetésre: a definiciókat lehetőség szerint a hallgatóság maga alkossa meg egy-egy probléma (pl. permutációk) vizsgálata során - a kisérő strukturák vizsgálatát is ez motiválja (pl. gyürük, mint Abel-csoportok endomorfizmusgyürüi).

4. Előadás: Véges automaták

A formális nyelveket mint szabad monoid réezhalmazait definiáljuk: igy természetesen értelmezhetők az ezek közti müvelet is. Definiáljuk a determinisztikus és nemdeterminisztikus végee automatákat, és belátjuk ezek ekvivalenciáját. Ennek alapján igazoljuk, hogy a reguláris nyelvek családja zárt a szokáeoe müveletekre, ide értve a véges tranezducerek által indukált leképezéeeket (gsm mappings) is. Már itt definiálásra kerülnek a 3-as tipueu grammatikák, és belátjuk hogy ezek ie a reguláris oeztályt definiálják, csakúgy mint e reguláris kifejezések. A reguláris nyelvekre vonatkozó iterációs tétel segitségével belátjuk, hogy $\{a^n b^n\}$ nem reguláris, és bevezetjük a szintaktikai kongruenciát és a szintaktikai monoidot. Leirjuk az egy betü feletti reguláris nyelveket, és belátjuk Kleene tételét.

5. Előadás: Nyelvtanok

Definiáljuk az i-tipusu nyelvtanokat (i=0, 1, 2) és belátjuk, hogy ezek (nem feltétlenül szigoru) hierarchiát alkotnak. Igazoljuk, hogy a nem önbeágyazó környezetfüggetlen nyelvek regulárisak, és belátjuk a Chomsky normál-forma tételt. A levezetési fa fogalmát már a környezetfüggő eset figyelembevételével ismertetjük: igazoljuk a környezetfüggő és hosszueágnövelő grammatikák ekvivalenciáját és okvetlenül kitérünk az üres szó (törlési szabályok) ezerepére is.

Amennyiben az idő megengedi, igazoljuk a Bar-Hillel lemmát és belátjuk, hogy ez $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1$ tartalmazás valódi: mindenképpen igazoljuk azonban (diagonalizációs módszerrel) az $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0$ tartalmszás valódi voltát. Megalkotjuk az elsőrendü predikátumkalkulus nyelvét leiró grammatikát, és ha az idő engedi, röviden beszélünk Lindenmayer és egyéb ujreiró rendszerekről is.

Megjegyzés: Ez a témakör igen szorosan összefonódott a nyelvtudomány generativ ágával, ennek ellenére ugy gondoljuk, hogy előadásunkban az ilyen vonatkozásokra legfeljebb utalni lehet. Ugy véljük, hogy e kérdéskör tárgyalása a nyelvészet előadások körébe tartozik, ha azonban valamilyen ok miatt ott nem kerülne erre sor, mindenképpen javasoljuk a problematika proszemináriumi tárgyalását. A témakör nagyságára való tekintettel legelőnyösebbnek azt látjuk, ha a hallgatóság a generativ grammatika kérdéseivel a matematikai és leiró nyelvészeti előismeretek megszerzése után, pl. másodévben nem speciálkollégiumon, hanem a reguláris oktatásba tartozó (legalább két féléves) tárgy keretein belül ismerkedik meg.

6. Előadás: Mátrixszámitás

Először a lineáris egyenletrendszer megoldásának kiküszöböléses módszeréről beszélünk, majd (ha eddig nem került rá sor) itt definiáljuk a mátrixokat is (mint számtáblázatokat). A hangsuly nem a vektorterek elméletén, hanem a mátrixokkal való számitás szabályain van: bebizonyitjuk, hogy az $n \times n$ -es valós mátrixok gyürüt alkotnak, és ebben a gyürüben konkretizáljuk, gyakoroljuk és kiegészitjük a gyürükről eddig tanultakat: példákat hozunk részgyürüre, (prim)ideálra, stb.

Külön foglalkozunk mátrixok blokkokra bontásával, transzponáltjával, és a vektoriális jelölésmóddal: determinánsokról azonban csak akkor beszélünk, ha a permutációk paritásával a hallgatóság már korábban megismerkedett, és az idő elegendő a determinánsok szorzástételének bizonyitására is.

Megjegyzés: Bár mi személy szerint ellene vagyunk, az előadó, ha úgy itéli helyesnek, az elemi bázistranszformációt is állithatja a tárgyalás középppntjába.

7. Előadás: Az ágazati kapcsolatok mérlege

Az előadás a (nyilt, statikus) Leontiev-modellt tárgyalja a következő formában: ha a j-edik termék egységnyi mennyiségének előállitásához az i-edik termékből $t_{ij} \geq 0$ mennyiségre van szükség, és a i-edik termékből x_i-t gyártanak, akkor $d_i = x_i - \sum_j t_{ij} x_j$ marad külső felhasználásra.

Ha tehát a (t_{ij}) technológiai mátrixot T-vel jelöljük, $\underline{d} = (1-T)\underline{x}$, és ebből a termelés egy adott $\underline{d}$ külső igény kielégitéséhez szükséges $\underline{x}$ nivója meghatározható. A gazdaság rugalmas, ha $\forall \underline{d} \geq \underline{0}\ \exists \underline{x} \geq 0 : \underline{d} = (1-T)\underline{x}$

Ha az i-edik termék egységára p_i, akkor a hozzáadott érték $v_j = p_j - \sum_i t_{ij} p_i$. A termelés profitábilis, ha $\forall \underline{v} \geq 0\ \exists \underline{p} \geq \underline{0}$ árrendszer, hogy $\underline{v} = (1-T)^* \underline{p}$. Belátjuk, hogy a gazdaság pontosan akkor rugalmas, ha profitábilis (mindkettőnek $(I-T)^{-1} \geq \underline{0}$ a szükséges és elégséges feltétele), és hogy ebben az esetben a nemzeti jövedelem megegyezik a nemzeti összetermékkel, azaz $(\underline{v}, \underline{x}) = (\underline{p}, \underline{d})$.

Megvizsgáljuk, hogy hogy változnak a megoldások, ha az igény (d) ill. a hozzáadott érték (v) valamely komponensben megnő (csökken), de a többi komponensben nem változik. Amennyiben az idő megengedi, a munka mint jószág bevezetésével zárttá tesszük a modellt, ill. valamely dinamikus változatát is megvizsgáljuk. Ha erre nem nyilik mód, szükségesnek látjuk legalábbis a pókháló-tételt (ld. pl. Andorka-Dányi-Martos (1967) ismertétni, mivel a dinamikus modellek mellett nem mehetünk el szó nélkül.

Megjegyzés: Annak ellenére, hogy ma már csak tudománytörténeti jelentősége van, hasznosnak tartanánk, ha a klasszikus Marx-i ujratermelési séma, mint kétszektoros dinamikus modell (az ujabb kutatások fényébsn) ismertstésre kerülne a proszemináriumon, de leginkább a P● előadás keretében.

8. Előadás

Erre az előadásna nem tüzünk ki külön anyagot: az előadó döntésére, ill. a hallgatók érdeklődésére bizzuk, hogy miről legyen szól.

Megjegyzés: A második negyedév 1-2, 3, 4-5, és 6-7 előadásai a negysdévet négy egységre bontják: a tartalékóra felhasználása ezek arányait módosithatja. Javasoljuk, hogy az előadáson ne uj anyag ismertetésére, hanem az eddigiek (különösen a 3. előadás) elmélyitésére ill. gyakorlására kerüljön sor.

Ha ez előadó időzavarba kerülne, az első 5 előadás anyagának alapos elsajátittatása érdekében a lineáris algebrai rész részben vagy tsljesen feláldozható, annál is inkább, mert semmiképp sem szeretnénk, hogy egyes anyagrészek átcsusszanak a következő félévre.

2.3 Harmadik nyegedév: Számok

1. Előadás: Előzmények

Ezen az előadáson összefoglaljuk (és szükeég esetén kiegészitjük) azt a logikai és algebrai apparátuet, amelyre a továbbiakban szükségünk lesz. Megtárgyaljuk az (elsőrendü) predikátumkalkulue és az elsőrendü struktura viszonyát: definiáljuk a kielégithetőeég, bizonyithatóság, függetlenség etb., fogalmait, továbbá átismételjük az ultrafilterekről és direkt szorzatról tanultakat. Bebizonyitjuk a prenex normálforma tételt is.

Összefoglaljuk a teetekről eddig tanultakat, és (egyelőre axiomatikusan) definiáljuk $\mathbb{R}^*$-t mint $\mathbb{R}$ bővitését. Itt a tárgyalás Keisler (1976b) 1A-1B-t követi (1-12), ée ha az idő megengedi, sor kerülhet 1C eleje (12-16) ismertetésére ie. Hasznoenak tartanánk, ha az előadást az infinitézimális számok történetének ismertetéee vezetné be.

2. Előadás: Nemstandard aritmetika

Az előadás az ultraszorzat konstrukció ismertetésével kezdődik: elkészitjük $\prod_{i\in\omega}\omega_i/_U$-t és belátjuk hogy a teljes indukció axiómája érvényes rá - a továbbiakban ezt tekintjük ω^*-nak. Igazoljuk a Łos lemmát, és megmutatjuk hogy Keisler (1976) 'Megoldás axiómája' ebből már lényegében következik.

Ezután a * természetes kiterjesztés vizsgálatával foglalkozunk: megnézzük hogy ω miképpen van beágyazva ω^*-ba, és külön figyelmet forditunk a külső és belső részhalmazok fogalmának világossá tételére. Belátjuk a következő "továbbterjedési" tételeket: ha $\mathbb{N} \subset S \subset \mathbb{N}^*$ belső részhalmaz, akkor $\exists n \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N} : n \in S$; hasonlóan, ha $\mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N} \subset S \subset \mathbb{N}^*$ belső részhalmaz, akkor $\exists n \in \mathbb{N} : n \in S$.

Innen az előadás Keisler(1976)1B* fejezetét követi, azzal a különbséggel, hogy mi nem $\mathbb{R}$, hanem $\mathbb{N}$ szuperstrukturáiról beszélünk. Összességében az előadás anyaga lényegében megegyezik az 1B*-1D* fejezetek anyagával(39-57), bár a sorrend megválasztása és az $\mathbb{N}$-re való szoritkozás a tárgyalást némileg egyszerübbé és a hallgatók előismereteihez jobban illeszkedővé teszi.

<u>Megjegyzés:</u> Mint az olvasónak bizonyára feltünt, az általunk választott prezentáció jellegzetes vonása, hogy igyekszünk a magasabbrendü nyelvek használatát a tárgyalásból maximálisan kiküszöbölni; a gyakorlat majd eldönti, hogy ez az elképzelésünk valóban annyira előnyös-e didaktikalilag, mint gondoljuk. Ennek az eljárásnak kétségtelen előnye, hogy kikerüli egyes, technikailag igen bonyolult tételek bizonyitását - sőt kimondását is - mint pl. a magasabbrendü elméletek kompaktsági tétele, hátránya viszont, hogy nem tudjuk a valós számok nem-standard modelljét közvetlenül megadni.

Természetesen nem tudjuk teljes egészében kiküszöbölni a magasabbrendü axiómákra való hivatkozást; mód nyilik azonban arra, hogy az ilyenek használatát leszoritsuk a minimumra oly módon, hogy csupán a teljes indukció axiómáját kelljen külön tárgyalni és innentől kezdve a magasabbrendü nyelvi terhet egészen a Dedekind-szeletekig a számkör felépitése vigye.

3. Előadás: Valós számok

Ebben az előadásban a számkör felépitésével foglalkozunk: standard esetben ezt a folyamatot a racionális számokig pl. Hall Partee (1978) 1E1-1E4 fejezetei (24-27 p.), a Dedekind-szeletek képzését pedig pl. Rudin (1978) 1/Függelék (27-3o p.) irja le az általunk követni kivánthoz hasonló formában. Nem-standard esetben ennek az eljárásnak a fő előnye az, hogy a monád, galaxis, stb. fogalma természetes módon kerül bevezetésre, és az infinitézimálisokkal való számolás szabályai is adódnak.

Mi több, ezáltal lehetővé válik annak igazolása, hogy az általunk konstruált $\mathbb{R}$ bir mindazokkal a tulajdonságokkal, amelyeket Keisler (1976a) és különösen Keisler (1976b) 1A-1B axiomaképpen előir a "hiperreális" számokra (1-11 p.).

4-5. Előadás: Nemstandard analizis

Ezeken az előadásokon megadjuk a konvergencia, folytonosság, egyenletes folytonosság, stb. a hagyományossal ekvivalens definicióit, és ezek felhasználásával belátjuk a standard analizis egyes alapvető tételeit - lehetőleg azokat, amelyeket az előző negyedévben már standard módon igazoltunk.

A tárgyalás Keisler (1976b) 3. és 5A fejezeteit követi (73-88, illetve 1o3-1o8 p.)

Megjegyzés: Bár kivánatosnak tartjuk, hogy a nemstandard analizis az általunk javasolt módon kerüljön tárgyalásra, egyáltalán nem ragaszkodunk ahhoz, hogy óráról órára éppen azok a dolgok kerüljenek tárgyalásra, amiket fentebb leirtunk. Ez az öt előadás egy egységet alkot, és a fentiekben csupán a tárgyalás sorrendjére (és persze a leadandó anyagra) kivántunk javaslatot tenni, tempójára nem.

Ugy véljük, hogy az általunk 1-1 előadásra javasolt anyagrészek nagyjából egyforma sulyuak, (kizárólag a 4. és 5. előadások között nem voltunk képesek a határt meghuzni) de a gyakorlati tapasztalatok ezen még sokat módosithatnak. Amennyiben az egy előadásra előirt anyag a vártnál rövidebb idő alatt is elvégezhető, az előadó ne habozzon áttérni a következő anyagrészre; egyedül azt tartjuk fontosnak, hogy ez a témakör öt óránál többet semmiképpen ne emésszen fel. A negyedévből hátralevő 3 előadást nem kivánjuk erre a témakörre áldozni, - ugy véljük, az 1.3. részben eléggé megindokoltuk az intenzionális logika oktatásának szükségességét.

6.-8. Előadás: Modális logika, logikai szemantika

Elképzelésünk szerint ennek a három előadásnak a tematikáját a Montague-grammatika megértéséhez szükséges előismeretek alkotják: mindenképpen szükség van tehát a λ-kalkulus és egy - fajta intenzionális logika ismertetésére és - amennyiben a Keenan-Falz szemantika is sorra kerül - a Boole-algebrákról eddig szerzett ismeretek elmélyitésére is.

Ezen tulmenően azonban nem akarjuk megkötni az előadó kezét, annál is kevésbé, mert itt már nemcsak a prezentációs mód, hanem a kiválasztott anyag is nagyban függ az előadó e kérdésekről vallott felfogásától és persze a hallgatóság befogadóképességétől: ez utóbbiról ugy gondoljuk, az előadónak már elég világos képe lesz, mire ideér. A mindenképpen szükséges előismeretek köréről pontos képet lehet kapni a Szabolcsi (1977)-ban emlitett alapvető munkák, ill. Keenan (1981) áttanulmányozásával.

3. PÉLDÁK, FELADATOK

3.1 Eleő negyedév

1. Gyakorlat

Példák a lehetetlenségi tételhez:

1. Három szavazó (x,y,z) és három lehetőség (A,B,C)
Tegyük fel, hogy a szavatazok $A <_x B <_x C$; $B <_y C <_y A$
$C <_z A <_z B$
Érvényesithető-e s 'többségi elv'? Miért? Mennyire általánositható sz a helyzet?

2. Három ezavazó (x,y,z) ée négy lehetóség (A,B,C,D)
Tegyük fel, hogy a ezavszatok $A >_x B >_x C >_x D$, ugyanugy $A >_y B >_y C >_y D$, végül $C >_z D >_z A >_z B$
Tekinteük a $\mathfrak{D}$ alkotmányt: minden szavazatnál a jelöltek kapnak (eorrendben) 4,3,2,ill 1 pontot ée s végeő sorrendet a jelöltek öszpontezáma határozza meg. Mennyire tesz eleget $\mathfrak{D}$ sz 1)....5) feltételeknek? Mi történik, ha B (akit az öeezes ezavazó rosezabnak kértékelt mint A-t) meghal? Előfordulhat-e ilyen eset a gyakorlstban?

3. Belefér-e a lehstetlenségi tétel hstókörébe az az eeet, amikor a váleaztók rangsorolva, vagy pl. részvénytőke szerint eulyozva vannak? Miért? Belefér e az az eeet, amikor az alkotmány csak bizonyos szavazók véleményét veszi egyáltalán figyelembe?

Feladatok a lshetetlenségi tételhez:

1. Kiterjeezthető-e a tétel arra az eeetre, amikor a ezavazóktól nem ezigoru ($<$ tipusu) eorbaállitást, hanem $\leq$ tipusu rendezéet várunk el? Hogy néz ki ekkor egy ezavszt?

2. A tétel látezólag érdektelen abban az eeetben, ha minden szavazó csupán az általa legjobbnak tartott lehetőségről nyilvánithat véleményt (klasezikue szavazás). Igaz marad-e ez a abban az eeetben is, ha megengedjük, hogy a szavazók koaliciókat alkoesanak (pl. pártokat alapiteanak, ahol az egyéneket a pártfegyelem már bizonyos ezavazat leadására kényszeriti)? Mi a helyzet elnökválaeztásnál, és mi a hslyzet parlamenti választáeoknál, ahol egyszerre az orezág eok körzetében lép fel körzetenként több jelölt?

3. Két lehetőség eeetén a klasszikus szavazat, és a sorbaállitásos szavazat ugyanannyi információt hordoz, ée a választás eldöntésére nem tünik jobb lehetőség a többségi elv érvényesitésénél (tekintsünk el a döntetlen lehetőeégétől, vagy egyezerüen tételezzük fel, hogy páratlan sok szavazó van). Ennek alapján pl. négy jelölt A,B,C,D között dönthetünk kétszeri ezavazáeeal

1.) A vagy B illetve C vagy D?

2.) A fennmaradó két jelölt közül válaeztunk.

Ez a rendszer akárhány jelölt esetén számos változatban alkalmazható. Kérdés: függhet-e a végeredmény "ügyrendi" döntéeektől, azaz attól, hogy pl. az első kérdést esetleg nem 1.) formájában, hanem

1.)' A vagy C illetve B vagy D formájában tesezük fel?

Példák a predikátumkalkulus szintaxisához:

1. Atomi formulák-e az alábbiak? (Példák)

2. Jól formált formulák-e az alábbiak (Példák)

3. Mikor mondhatjuk, hogy két zárójel párban áll? Hogyan tudjuk megkeresni egy zárójel párját?

4. Hogyan definiálható a részformula? Hogyan definiálható egy kvantor hatóköre?

5. Egy formulát x-ben zártnak nevezünk, ha minden benne szereplő x egy kvantor hatókörében áll, ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a formula x-ben nyitott (ha tartalmaz egyáltalán x-et.) Hozzunk példát mindkét esetre (konkrét nyelveken) és értelmezzük a két lehetőséget.

6. Adjunk meg egy, a valós számok leirására alkalmas nyelvet.

Feladatok a predikátumkalkulus szintaxisához:

1. Irjuk fel részletesen az előadáson ismeretett jólformáltság-ellenőrző algoritmus harmadik pontját.

2. Adjunk algoritmust azon jólformált formulák elkülönitésére, amelyek minden változójukban zártak.

3. Adjunk meg egy, a véleményösszeegyeztetési probléma tárgyalására alkalmas nyelvet.

2. Gyakorlat

1. Az unió képzés az órán adott definicióját (és semmi mást) felhasználva igazoljuk e müvelet következő tulajdonságait:

1. $A \cup \emptyset = A$

2. $A \cup B = B \cup A$ (kommutativitás)

3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (asszociativitás)

4. $A \cup A = A$ (idempotencia)

5. $A \subset B$ pontosan akkor ha $A \cup B = B$

Mely törvényszerüségeknek tesz ezek közül az összeadás müvelete eleget? Nevezhetjük-e $\emptyset$-t ennek alapján a halmazelmélet zérusának?

2. Adjunk az unióaxiómával, párhuzamos definiciót egy

halmaz metszetének, és definiáljuk A B-t ennek segitségével. Igazoljuk ebből a következő állitásokat:

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$

2. $A \cap B = B \cap A$ (kommutativitás)

3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asszociativitás)

4. $A \cap A = A$ idempotencia

5. $A \subset B$ pontosan akkor, ha $A \cap B = A$

Mely törvényszerüségeknek tesz ezek közül a szorzás müvelete eleget? Nevezhetjük e $\emptyset$-t ennek alapján a halmazelmélet zérusának?

3. Megindokolható-e az eddigiek alapján, hogy az sgyesitée müveletét halmazok összeadásának, a metszet müveletét pedig halmazok.szorzásának is nevezik? Miért nem forditva?

4. Milyen törvényszerüségek kötik össze az unió és a metszet müveleteket? Van-e ezeknek megfelelőjük a számok körében?

5. Mint tudjuk, minden a <u>halmazhoz</u> tartozik egy <u>tulajdonság</u>, t.i. $x \in a$, és [ZF 6] biztositja, hogy snnsk forditotja is minden alaphalmazon teljesüljön. Definiáljuk ennek alapján egy halmaz egy alaphalmazra vonatkozó komplementumát, és igazoljuk a következő jállitásokat:

1.) $\bar{\bar{A}} = A$; $\bar{\emptyset} =$ alaphalmaz; $\overline{\text{alaphalmaz}} = \emptyset$

2.) $A \cap \bar{A} = \emptyset$; $A \cup \bar{A} =$ alaphalmaz

3.) $A \subset B$ pontosan akkor, ha $\bar{A} \supset \bar{B}$

4.) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (De Morgan törvények)

6. Definiáljuk két halmaz különbségét adott alaphalmaz mellett úgy, mint $A \setminus B := A \cap \bar{B}$. Mennyire függetlenithető ez a definició az alaphalmaz választásától?

7. Igazoljuk, hogy 1.) $A \subset B$ pontosan akkor, ha $A \setminus B = \emptyset$
2.) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$, $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

Feladatok:

1. Szükség van-e a metszet-axiómára? Dsfiniálható-e egy halmaz metszete e nélkül is? Igazoljuk, hogy alkalmae metszetdefinicó esetén a metszetaxióma ezükségképpen teljesül, igy tehát a halmazelmélet <u>tételének</u> tekinthető.
2. A gyakorlatokban megismert törvényszerüeégek mellett, még számos egyéb haeonló azonosság érvényesül: irjunk fel tiz ilyen és bizonyitsük be őket.

Bár tulajdonképpen minden halmaz halmazokból áll, szokás halmazok halmazait halmazrendszereknek vagy halmazcsaládoknak hivni, és jelöléeükre irott betüt haaználni.

<u>Definició:</u> $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ (olvasd: $\mathcal{A}$ durvább $\mathcal{B}$ -nél, vagy $\mathcal{B}$ finomabb $\mathcal{A}$ -nál), ha $\forall x \quad x \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists y \, (y \in \mathcal{B} \wedge y \subset x)$
azaz ha $\mathcal{A}$ minden <u>halmazánál</u> van kisebb $\mathcal{B}$ -beli halmaz.
A moet következő feladatok ezzsl a relációval foglalkoznak.
3. Igaz-e, hogy $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ esetén $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$? Igaz e megforditva?
4. Ha ceupán egy alaphalmaz réezhalmazaiból álló halmazrendszerekre szoritkozunk, igaz-e, hogy az alaphalmazt tartalmazó családok durvábban az összes többinél? Igaz-e hogy az üres halmazt tartalmazó családok finomabbak az öszes többinél? Mi itt az alaphalmaz szerepe?

5. Milyen tulajdonságai vannak a $\prec$ relációnak?

<u>Definició:</u> $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ (olvasd: $\mathcal{A}$ ekvivalsne $\mathcal{B}$ -vsl), ha
$\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ és $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$
6. Vannak-e skvivalens halmazrendszersk, ha kikötjük, hogy

7. Milyen tulajdonságai vannak a $\sim$ relációnak?

3. Gyakorlat

A reláció fogalmának halmazelméleti modellje alapvető fontosságu nem csupán a jelen tananyag, banem bármilyen matematikai terület elsajátitásában: éppen ezért rendkivül fontoe, hogy ezt a fogalmat a hallgatók világosan értsék és rutinszerüen tudják alkalmazni. Az ezt előee-gitő gyakorlatok megválasztását a gyakorlatvezetőre biz-zuk: bőségse példaanyag található többek közt Bagyinezkiné -Csörgő-Gyapjae (1981), Speranza (1980), Halmos-Sieglsr (1981), Maurer-Virág (1972) müveiben, de akár az eddig ismsrtetéers került anyagrészben is. Ha snnek az anyag-résznek az elsajátitása a vártnál gyorsabban megy (pl. mert a hallgatók 'uj matematikát' tanultak az általános iskolában) akkor sor kerülhst különféle feladatok meg-oldására is: az alább felsorolt feladatok az előadáeban ismertstett anyagot teszik teljeeebbé.

Fsladatok:

1. Egészitsük ki (és lehetőség szsrint formalizáljuk) az osztályfelbontás-tétsl bizonyitását.
2. A halmazelmélstben a relációk balmazok: milyen értelmet tudunk tulajdonitani az unió, metszet, különbség, és kompe-komplementum müveleteinek relációk között?
3. Igazoljuk, hogy ba R a-n reflexiv, antiszimmetrikue, tran-zivit és trichotóm reláció ($\leq$ tipueu rendszés), akkor R irreflexiv, tranzitiv és <u>szigoruan trichotóm</u>, tehát minden x és y elemre x=y xRy és yRx közül mindig pontoean az egyik

lesz igaz. Igaz-e hasonló eredmény ha részbenrendezésből hagyjuk el az átlót?

4. A $\sim$ ekvivalenciarelációt a $\prec$ részbenrendezés segitségével definiáltuk: általánositható-e ez az eljárás tetszőleges részbenrendezésre?

5. Az előadáson ismertetett hat relációtulajdonság (szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás, reflexivitás, irreflexivitás, trichotómia) teljesülése ill. nem teljesülése szerint a relációkat elvileg 64 kategóriába sorolhatjuk. (Miért?) Ez a szám 48-ra csökken, ha figyelembe vesszük, hogy semmilyen reláció nem lehet egyszerre reflexiv és irreflexiv. Valójában ez a 48 lehetőség sem fordulhat elő mind: ha pl. egy reláció szimmetrikus, antiszimmetrikus, és trichotóm, akkor már csupán az identitás lehet, és igy nyilván szükségképpen reflexiv és tranzitiv is. Vizsgáljuk meg szisztematikusan, hogy milyen lehetőségek fordulhatnak elő egyáltalán, és ezek közül melyek határozzák meg egyértelmüen az adott csoportba tartozó relációt. A fennmaradó nyilt osztályok (tehát azok, amelyeknek több, mint egy eleme van) közül melyeknek adtunk nevet az előadáson? Milyen nevet lehetne adni a többi osztálynak? Van-e még olyan relációtulajdonság, amelyet érdemes lenne a fenti hathoz hasonlóan névvel ellátni? Milyen további megkülönböztetéseket tesz(nek) ez(ek) a tulajdonság(ok) lehetővé?

4. Gyakorlat

A negyedik előadás anyaga igen nehezen emészthető: éppen ezért a függvény és a müvelet fogalmainak gyakorlását későbbre halasztjuk. Az alább ismertetett gyakorlatok tulajdonképpen mind feladatszintüek: ugy véljük azonban, hogy a hallgatóság az eddigiek során már kellő matematikai érettségre tett szert megoldásukhoz. Ha ez nem igy lenne, feltétlenül szükséges konzultációs óra beiktatása (vagy az oktatás ütemének más módon való mérséklése).

1. Definiáljuk az $\bigcup$ és $\bigcap$ müveleteket tetszőleges indexhalmazra. Milyen törvényszerüségeknek tesznek ezek eleget?

2. Definiáljuk a direkt szorzatot tetszőleges indexhalmazra. Hogyan értelmezhetők a direkt szorzat elemei?

3. Mit mond a kiválasztási axióma az (általános) direkt szorzat elemeiről?

4. Egészitsük ki az ω létezését megmutató bizonyitást! Adjunk példát olyan [ZF 12]-nek eleget tevő c halmazra, amelynek ω valódi része.

5. Igazoljuk, hogy ω minden x elemének van megelőzője ($\emptyset$ kivételével), azaz $\forall \emptyset \neq x \in \omega\ \exists y \in \omega : x = y \cup \{y\}$

Egyértelmü-e a megelőző elem?

6. Elképzelhető -e, hogy ω valamely eleméből végtelen leszálló lánc indul? Függ-e ez a regularitási axiómától?

7. Elképzelhető-e hogy ω-t nem meriti ki $\{0,1,2,3,\dots\}$ Be tudnánk bizonyitani az ellenkezőjét?

8. Mit jelent az, hogy 'véges'? Végesek-e ω elemei?

9. Bizonyitsuk be, hogy $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

10. A regularitási axiómával kapcsolatos a következő paradoxon: amennyiben a regularitási axiómát nem kötjük ki, lesznek (lehetnek) olyan halmazok, amelyek nem jól fundáltak, azaz van olyan elemük, amelynek van olyan eleme, amelynek van olyan eleme, amelynek van olyan eleme, stb. ... Tehát végtelen leszálló láncot tartalmaznak. Tekintsük azonban a jól fundált halmazok halmazát: jelöljük ezt G-vel. Ha G jól fundált, akkor $G \in G$, tehát G nem jól fundált, mivel

....$G \in G \in G \in G \in G \in G$ végtelen leeszálló lánc.

Ha azonban G nem jól fundált, akkor van olyan G_0 eleme, amelynek van olyan G_1 eleme etb. ....
Ekkor tehát G_0 maga sem jól fundált, tehát nem lehetne G eleme, ellentmondás.
Feloldható-e a paradoxon a regularitási axióma megkövetelése nélkül? Érvényes-e hasonló paradoxon a nem jól fundált halmazok halmazára?

Definiálható-e a jól fundáltság fogalma a természetes számokra való hivatkozás nélkül? Hogyan definiáljuk a jól fundáltságot akkor, ha a definicióban hivatkozhatunk a természetes számokra?
11. Játszhatnak-e szerepet halmazok konstruálásában az olyan axiómák, amelyek nem valamely halmaz létezését követelik meg? (Ilyenek pl. [ZF 1]....[ZF 3]) Ha igen, hogyan, ha nem, miért?

5. Gyakorlat

1. Gyakoroljuk a függvény fogalmát! (Példák bőséggel találhatók Bagyinszkiné-Csörgő-Gyapjas (1981), Halmos-Siegler (1981), Speranza (1980), Maurer-Virág (1972) müveiben).
2. Ismételjük el a $\leq/\sim$ konstrukció elkészitését néhány konkrét példán.
3. Adjunk példát olyan rrh (részbenrendezett halmaz)ra, amelyben egy minimális és több maximális, egy minimális és egy maximális, ... elem van.
4. A majorálás a polinomok között rrr: $p \leq q \overset{d}{\Leftrightarrow} \forall x\ p(x) \leq q(x)$
Van-e az y=x és y= -x polinomoknak közös felső korlátja?
Van-e az y=x és y= -x polinomoknak legkisebb közös felső

korlátja? Van-e tetszőleges polinomoknak közös aleő (felső) korlátja? Hálót alkotnak-e a polinomok a majorálásra, mint részbenrendezésre nézve?
A polinomok P halmaza nyilván beágyazható (a $\leq$ relációk megtartásával) a függvények F halmazába mint hálóba, sőt akár a folytonos függvények C halmazába is. C nyilván rész hálója F-nek. (Miért?) Van-e C-nél szükebb, P elemeit tartalmazó háló? Dieztributivak-e a szóbanforgó hálók?

Feladatok:

1. A hőmérséklet, erő, tömeg, töltés, ellenállás stb. a fizika jellegzetes mennyiségi fogalmai: viselkedésük azonban számos ponton eltérő. Mik ezek a pontok, és milyen kritériumokat lehet leszürni ebből a teljes rendezések számszerüsítésére nézve?
2. A közgazdaságtanban időről-időre jóléti függvényről, ill. preferenciarendezésről beszélnek: próbáljuk meg a preferenciarendezést befolyásoló tényszőket meghatározni, és fejtsük ki részletesebben az intelligenciát meghatározó tényezőket is. Mindkét példánál törekedjünk teljességre!
3. Elképzelhető-e a Pareto-optimumnál jobb helyzet, amely nem optimális? Elképzelhető-e hogy egy Rawls-igazságos helyzet nem Pareto-optimális, vagy forditva? Elképzehető-e hogy egy rendszerben egyáltalán nincs Pareto-optimális, ill. Rawls-igazságos állapot? Hozzon számszerü példákat lehetőleg minél kevesebb egyént és alternativát tartalmazó modellekben.

Minden példát egy olyan táblázatban (mátrixban) irjunk fel, ahol az i-edik sor j-edik eleme azt fejezi ki, hogy az i-edik egyén mennyire elégedett a j-edik állapottal: ${}_i[A]_j = u_i(c_j)$

6. Gyakorlat

1. Bizonyitsuk be a kiválasztási axióma, a Hausdorff-féle maximalitási elv és a Zorn-lemma egyenértékűségét (Halmos-Siegler, 66.p.)

A disztributiv hálók és a Boole-algebrák rutinos ismerete a továbbiakhoz elngedhetetlen: az ennek megszerzéséhez szükséges gyakorlatok kiválasztását a gyakorlatvezetőre bizzuk. Példák bőségesen találhatók Fuchs Algebrájában (196.p.) és Bagyinszkiné-Csörgő-Gyapjas (1981) példatárában (103.p.) és a legtöbb algebrakönyvben. A későbbiekre való tekintettel fontos $\mathbb{N}$ véges és covéges részhalmazai nak hálóira, különösen pedig az utóbbiak által generált ultraszürűre külön is kitérni. Bizonyitsuk be azt is, hogy Boole-algebrában pontosan azok a filterek ultrafilterek, amelyek minden elemhez vagy őt vagy a komplementumát tartalmazzák.

7-8. Gyakorlat

(ld. 7-8. előadás).

3.2 Második negyedév

Az első két előadás anyagához nagyszámu gyakorlat található Rudin (1978) 53-56.p. és Speranza (1980) 177-179.p. müveiben.

1. Adjunk ujszerü példát olyan hálóra, amelyben a) van olyan halmaz, amelynek nincsen egyesitése (metszete), b) minden ideál főideál. Milyen kombinációi képzelhetők el e két tulajdonságnak? És ha feltesszük, hogy a háló egyben

Boole-algebra is?

2. Jelölje $\nu_2(x)$ az $x=\frac{p}{q}$ racionális szám számlálójában és nevezőjében is előforduló 2 tényezők számának különbségét. Igazoljuk, hogy $\varrho(x,y)=2^{\nu(|x-y|)}$ eleget tesz a távolság axiómáinak, feltéve hogy $\varrho(x,x)$-et 0-ként definiáljuk. Milyen hasonló eredmény mondható ki, ha 2 helyett 3-at tennénk? És ha 4-et?

3. Ha a metrikus tér axiómái közül nem követeljük meg, hogy $\varrho(x,y)=0 \Rightarrow x=y$ fennálljon, akkor u.n. félmetrikus teret kapunk: hozzunk példát olyan félmetrikus térre, amelyik nem metrikus tér! Melyek maradnak érvényben az előadáson tárgyalt tételek közül félmetrikus terekre? Igazoljuk, hogy $\varrho(x,y)=0$ ekvivalenciareláció félmetrikus tereken, sőt az is igaz, hogy ez az ekvivalencia kompatibilis ϱ -val, azaz ha $x\simeq x_1 \wedge y\simeq y_1$, akkor $\varrho(x,y)=\varrho(x_1,y_1)$ Mi történik, ha faktorizálunk $\simeq$ szerint?

4. Vizsgáljuk meg, hogy egy metrikus tér nyilt (zárt) altereiben mely részhalmazok lesznek nyiltak ill. zártak.

Feladatok:

1. Igazoljuk, hogy ha (M,ϱ) (fél)metrikus tér, akkor $(M,\frac{\varrho}{1+\varrho})$ is az, és lássuk be, hogy a folytonos függvények ugyanazok. Mi az az információ, amit $\frac{\varrho}{1+\varrho}$ megőriz ϱ-ból? Mi az az információ, amelyet $\min(1,\varrho)$ őriz meg? Mi a viszony a kettő között?

2. Ha adottak az (M_i,ϱ_i) metrikus terek, $(i\in\omega)$, és tudjuk, hogy $\forall i\in\omega\ \forall x,y\in M_i\ \ \varrho_i(x,y)\leq 1$ akkor definiálni tudjuk a $\prod_{i\in\omega} M_i$ metrikus teret. Hogyan? Mennyire lesz ez a szorzat független a tényezők sorrendjétől?

3. Adható-e értelem a negativ számmal kifejezett távolság-

nak? Hogyan módosulnának a (fél)metrikus tér axiómái? Mi az a legáltalánosabb eset, amikor ez megtehető?

4. A metrikus térbeli "gömb" definiciója olyan volt, hogy

a) csak a ρ metrikára támaszkodott

b) 2 és 3 dimenziós euklideszi térben hiven tükrözte a gömb geometriai fogalmát.

Definiálható-e az egyenes vagy más geometriai alakzat hasonló módon?

2. Gyakorlat

Az első gyakorlatnál említett tankönyvi példákon kivül elsősorban a határértékkel való számolási készség kialakitását elősegitő példák megoldása a cél: ilyenek bőséggel találhatók Rudin emlitett müvének 87-91., 107-110., és 122-128.p. és szinte minden analizis tankönyvben, ideértve Keisler (1976a)-t is.

1. Egy $f: R \to R$ függvényre azt mondjuk, hogy eleget tesz a Lipschitz feltételnek, ha $\forall x \forall y \; |f(x)-f(y)| < L|x-y|$ Igazoljuk, hogy az ilyen függvények L konkrét értékétől függetlenül folytonosak, sőt egyenletesen folytonosak. Ha $L < 1$ akkor azt mondjuk, hogy f kontrakció.(Miért?)

Az ilyeneknek az u.n. Picard-Banach tétel szerint van fixpontja, azaz $\exists c \in \mathbb{R} : c = f(c)$

Bizonyitsuk meg a Picard-Banach tételt! Milyen feltételek mellett általánosítható a tétel metrikus terekre?

2. Bizonyitsuk be a következő fixpont-tételt: ha f a [0,1] intervallumot olymódon képezi folytonosan önmagára, hogy $f(0)=1$ és $f(1)=0$, akkor $\exists\, 0 < c < 1 : c = f(c)$

3. Igazolja, hogy (ρ_2 metrika melletti) euklideszi tér két gömbjének a metszete ha nem üres, akkor tartalmaz gömböt.

Igaz-e hasonló állítás a ϱ_1 és ϱ_∞ metrikák esetén? Igaz-e tetszőleges metrikus térben?

Feladatok:

1. Egy $\mathfrak{A}$ halmazrendszert rácsnak nevezünk, ha $\mathfrak{A} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathfrak{A}$ és $\forall x,y \in \mathfrak{A}\ \exists z \in \mathfrak{A} : z \subset x \wedge y$. Igazolja, hogy a) egy lánc mindig rács, b) tetszőleges metrikus tér tetszőleges x pontját a belsejükben tartalmazó halmazok K(x) rendszere rács sőt filter (neve a pont <u>környezetszűrője</u>).

2. Alkossák az r_n halmazt az $\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ sorozat n-nél nagyobb indexü tagjai: igazolja, hogy $\{r_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, melyet az a_n-hez rendelt sorozatrácsnak hivunk, valóban rács. Igazolja, hogy $a_n \to b$ akkor és csak akkor áll, ha K(b) durvább a sorozathoz tartozó sorozatrácsnál. Igaz s ez az állítás $\mathbb{R}^n$-ben? Igaz s tetszőleges metrikus térben? Definiálható-e ennek alapján rács határértéke?

3. Gyakorlat

Az előadáson tárgyalásra kerülő anyagrész jellege miatt az a leghelyesebb, ha ez a gyakorlat egységet alkot az előadással, és három órán át a példamegoldás és bizonyitás váltja egymást. Éppen ezért erre a gyakorlatra nem tüzünk ki külön feladatokat minél több eredmény ismertetésére kerül sor ugy, hogy azokat a hallgatók maguk fedezik fel, annál jobb.

A legtöbb algebra-tankönyv (pl. Fuchs 1977) igen sok a témakörbe vágó példát és feladatot tartalmaz: megemlitjük még ezen kivül Speranza (1980), Maurer-Virág (1972) és Bagyinszkiné-Csörgő-Gyapjas (1981) könyvét ill. példatárát is.

4. Gyakorlat

A gyakorlat egy részét még a 3. előadás anyagának gyakorlására szánjuk: a hátralevő időben véges automatákkal kapcsolatos feladatokat oldunk meg. Ilyenek bőséggel találhatók pl. Hall-Partee (1978) vagy Salomaa (1973) könyveiben - ezek az 5. gyakorlathoz is jól használhatók.

Átvezetésképpen a véges automaták mint unér algebrák tárgyalhatók, különösen akkor, ha az előző órai röpdolgozat tanulsága szerint a 3. előadás anyagát a hallgatók alaposan elsajátitották.

5. Gyakorlat

A gyakorlat fő célja az ujrairó rendszerek használatában való rutin megszerzése: éppen ezért az idő legnagyobb részét konkrét nyelvekre való nyelvtanok irása tölti ki. Az idő fennmaradó részében szó lehet az $\mathcal{L}_i$ ($i < 3$) családok müveleti zártságáról, ill. az ennek vizsgálatához szükséges haladottabb tételekről is.

Feladatok:

1. Adjunk olyan algoritmust, amely tetszőleges reguláris grammatikáról és α szóról eldönti, hogy a grammatika generálja-e a kérdéses szót.
2. Adjunk olyan algoritmust, amsly tetszőleges a) környezetfüggetlen, b) környezetfüggő grammatikáról és α szóról eldönti, hogy a grammatika generálja-e a kérdéses szót.
3.* Adható-e ilyen algoritmus 0-tipusu grammatikára?
4. Adjunk olyan algoritmust, amely tetszőleges reguláris/környezetfüggetlen/*környezetfüggő/0-tipusu grammatikáról

eldönti, hogy generál-e egyáltalán valamit.

5. Adjunk olyan algoritmust, amely tetszőleges reguláris/környezetfüggetlen/*környezetfüggő/0-tipusu grammatikáról eldönti, hogy végtelen sok szót generál-e.

6.Gyakorlat

A gyakorlat célja a mátrixokkal való lszámolási rutin mggszerzése: erre alkalmas gyakorló feladatok bőséggel taláalhatók Gáspár (1971) példatárában, ée általában a legtöbb lineáris algebrával foglalkozó tankönyvben. Amennyiben az előadó mégis az elemi bázistranszformáció köré épiti fel az előadást, szükségesnek látjuk, hogy a 2X2-es (3x3-as) mátrixok, mint a sik (tér) geomstriai transzformációi is tárgyalásra és gyakorláera kerüljenek.

Feladatok:

1. Miért nem érdemss mátrixok szorzatát ${}_i[AB]_j = {}_i[A]_j \cdot {}_i[B]_j$ -vel definiálni?*Miért árdemes az ${}_i[AB]_j = \sum_{k=1}^{n} {}_i[A]_k \, {}_k[B]_j$ definioiót válssztani?

2. A blokkokra bontott mátrixokkal szerzett tapasztalatok alapján dolgozzuk ki tstszőleges gyürü feletti (négyzetes) mátrixok elméletét.

3. Mit tudunk elmondani az olyan mátrixok GL(n,p) halmazáról, amelyek elemei mod p maradékoeztályok? Mi általánositható mindebből test feletti mátrixgyürükre?

7. Gyakorlat

1. Ha a j-edik termék előállitására az i-edik termékből k_{ij} darabra van szükség, akkor ezeket az adatokat egy K mátrix-

ban, az u.n. közvetlen ráforditáeok mátrixában tüntethetjük fel. Ez a mátrix mindig háromezög-mátrixszá permutálható (miért?), tehát nilpotens (Miért?). Hogy határozható meg K-ból az a T mátrix, amelynek t_{ij} eleme az j-edik termék előállitásához felhasznált i-edik termék összmennyiségét méri (tehát beszámitja a közbenső termékként felhasználásra kerülő mennyiséget is)? Hogyan határozható meg T ismeretében K? Háromezög-mátrix-e T? Nilpotens-e T? Ennek a problémakörnek ill. a statikus Leontiev-modellnek gyakorlására kiválóan alkalmasak a Gáspár (1971) 4. fejszetében található példák.

Feladatok:

1. Tegyük fel, hogy a táreadalom rendelkezésére álló tőke a t-edik generációban K_t: ebből az adott generáció c_t-t elfogyaszt, és a következő generációnak $\alpha(K_t - c_t)$ jut. (Ha sohasem nyúlnak a tőkéhez, nyilván $K_t = \alpha^t K_0$) Feltehetjük, hogy $\alpha > 1$.
Tegyük fel, hogy mindegyik generáció magáévá teszi a Rawls-féle igazságossági elvet, és hogy jóléte a saját c_t fogyasztásával plusz gyermekei c_{t+1} fogyasztásának β -szorosával arányos (feltehető, hogy $\beta < 1$). Hogyan fognak alakulni a c_t fogyasztások és K_t tőkék? Mi van, ha az unokákat is beszámitjuk, azaz a $w_t = c_t + \beta c_{t-1} + \beta^2 c_{t-2}$ függvény t-beli minimumának maximalizálására törekszünk? És ha minden generációt beszámitunk? És ha már a gyermekekkel sem törödünk? Mi van ha nem kötjük ki, hogy $\alpha > 1$ és $\beta < 1$?

2. Tegyük fel, hogy egy adott B összeg birtoklása teljes boldogsághoz juttat minket, a pénzkiadás örömet hoz, és

a pénzbeszerzés (munka) kellemetlenséggel jár. Tételezzük fel továbbá, hogy a rendelkezésünkre álló ($< B$) tőke munka nélkül is kamatozik, és teljes bevételünk a befektetett munkánk és tőkénk monoton (pl. lineáris) függvénye.

Mekkora részét érdemes ennek a jövedelemnek féretenni ha az egész életünkre kjutó örömöt kivánjuk maximalizálni és feltesszük, hogy örökké élünk. Mi történik akkor, ha véges T várható élettartamot tételezünk fel, ill. akkor ha a boldogságnak nincs B felső korlátja? Próbáljunk meg mind diszkrét mind folytonos idővel dolgozó modellt késziteni.

8. Gyakorlat

Erre a gyakorlatra nem tüzünk ki külön példákat vagy feladatokat: ld. a nyolcadik előadásnál tett megjegyzést .

3.3 Harmadik negyedév

1. Gyakorlat

E gyakorlat menetét (csakúgy mint az előadásét) a hallgatóság tudásszintje határozza meg: elsődleges célunk a továbbiakhoz szükséges logikai apparátus használatát rutinszerüvé tenni.

Különösen fontosnak tartjuk, hogy a belső modell fogalma legalább a gyakorlaton ismertetésre kerüljön: példaként az euklideszi és Bolyai-geometriát, ill. a Boole-algebrák és Boole-gyürük egymásban készitett modelljeit ajánljuk, ez kutóbbit lehetőleg feladatsorozat formájában feldolgozva.

2. Gyakorlat

A gyakorlat célja elsősorban az $\mathbb{N}^*$-ban való kszámolási rutin elsajátitása: erre igen alkalmasak a Keisler-(1976a) 1. lfejezetében található példák (esetleg módositott változatai). Amennyiben a hallgatóságnak nincsenek nehézségei az előadáson leadott anyaggal, mód nyilik arra, hogy a kérdéskört egy másik oldalról is megközelitsük: feladatsorozat formájában kitüzhető az elsőrendü elméletek kompaktsági tétele, és erre való hivatkozással ismertethető Keisler (1976b) 1E fejezete is (23-25.p.)

3. Gyakorlat

A gyakorlat célja az infinitézimálisokkal való számolás szabályainak begyakoroltatása: erre kiválóan alkalmasak a Keisler (1976a) 1. fejezetében taláható példák. Rendkivül hasznos, ha megoldásra kerülnek az alábbi

Feladatok:

1. Bizonyitsuk be, hogy ha egy s_n <u>belső</u> számsorozat elemei mind kisebbek valamely $m \in \mathbb{R}^*$-nál $\forall n \in \mathbb{N}$-re, akkor $\exists k \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ hogy $\forall n < k$-ra s_n is kisebb m-nél.
2. Bizonyitsuk be, hogy ha egy s_n <u>belső</u> számsorozat elemei a 0 körüli monádba esnek $\forall n \in \mathbb{N}$-re, akkor $\exists k \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ hogy $\forall n < k$ -ra, s_n is Mon(0)-ba esik.

4-5. Gyakorlat

A gyakorlat célja az infinitézimális kalkulus felhasználása a szokásos analizis-feladatok megoldására: példák bőséggel találhatók Keisler (1976a) tankönyvében.

6-8. Gyakorlat

Amennyiben az intenzionális logika apparátusát a hallgatóság rutinosan használja, sor kerülhet az episztemikus, deontikus és egyéb modális logikai kalkulusok kiépitésére is.

4. IRODALOM

ANDORKA R. - DÁNYI D. - MARTOS B.: Dinamikus népgazdasági modellek. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1967. 441 p.

A Leontiev-modell tárgyalásánál e könyv 2.1.3 fejezetére is támaszkodunk: a közgazdaságtani modellek iránt érdeklődő olvasó ebben a müben igen sokféle modellre találhat példát.

ARROW, K.I.: A difficulty in the concept of social welfare. =The Journal of Political Economy. 58. 1950. 328-346.p.

A lehetetlenségi tétel első bizonyitása: ez a cikk megtalálható ARROW-SCITOVSKY (1969)-ben is. A témakörről magyar nyelven ld. ARROW (1979) előszavát (12-15.p.): ez a bizonyitást nem irja le.
Kiegészitésképpen TULLOCK (1959) cikkét ajánljuk: ez nem igényel matematikai előismereteket.

ARROW, K.I. - SCITOVSKY, T.: Readings in welfare economics. London, Allen and Unwin, 1969. 734 p.

E szöveggyüjteményt a jóléti közgazdaságtan iránt érdeklődő olvasónak ajánljuk: az itt található (általában igen magas szinvonalú) cikkek egy része azonban anyagunkon túlmenő analizisbeli és lineáris algebrai előismereteket tételez fel. Egyik feladatunkat Frank P. Ramsey: A mathematical theory of saving c. cikkére (619-633.p.) alapoztuk.

ARROW, K.I.: Egyensuly és döntés. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1979. 411 p.

Ezt a cikkgyüjteményt a közgazdaságtan iránt érdeklődő olvasónak ajánljuk: felhivjuk azonban a figyelmet arra, hogy mig egyes cikkek egyáltalán nem igényelnek matematikai előképzettséget, mások megértéséhez az analizis, a lineáris algebra és a valószinüségszámitás tananyagunkon messze túlmenő ismeretére van szükség. Egyik feladatunkat "Az igazságos megtakaritás Rawls-féle elve" c. cikkre alapoztuk (177-190.p.)

BAGYINSZKINÉ OROSZ A. - CSÖRGŐ P. - GYAPJAS F.: Példatár a bevezető fejezetek a matematika c. tárgyhoz. (Jegyzet.) Tankönyvkiadó, 1981. 124 p.

E példatár 1., 2., 6. és 7. fejezete igen jól használható tananyagunk egyes fejezeteinek begyakorlásához.

BENKŐ, I.: A topologia elemei. Kolozsvár, Dacia, 1975. 261 p.

Ez a könyv készüléshez igen jól használható: az 1. fejezet a metrikus terekről, a 0. fejezet (függelék) pedig a halmazokról, rendezésről és számokról tanultak nagy részét foglalja össze és egésziti ki rendkivül tömör formában. Erre a könyvre mind a jelölések tekintetében, mind a felépités megválasztásában számos ponton támaszkodtunk.

CARNAP, R.: Logical foundations of probability. University of Chicago Press, 1950. 613 p.

Az 5. előadásban Carnap az 1. fejezetben kifejtett egyes gondolataira támaszkodunk: e fejezet elolvasását minden hallgatónak ajánljuk.

COURANT, R. - ROBBINS, H.: Mi a matematika? Gondolat, 1966. 510 p.

Ez a klasszikus matematikai bevezetés (amely csupán a középiskolai tananyag ismeretét tételezi fel) kitűnően kiegésziti az általunk tárgyalt anyagot: különösen az analizis és a geometria iránt érdeklődőknek ajánljuk.

DUNCAN, I.: Bevezetés a komplex függvénytanba. Müszaki Kiadó, 1974. 287 p.

E könyv első fejezete igen alkalmas a metrikus terekről tanultak gyakorlására és kiegészitésére: a további fejezeteket azonban csupán az analizis iránt komolyabban érdeklődő hallgatóknak ajánljuk.

FUCHS, L.: Algebra. (Jegyzet.) Tankönyvkiadó, 1977. 269 p.

Az 5.6. előadásban nagy mértékben támaszkodtunk e mü 6. fejezetére: tananyagunk ezen kivül csupán az 1. fejezetet fedi le. Az algebra iránt érdeklődő hallgatónak azonban e könyv további tanulmányozását ajánljuk elsősorban.

FUTÓ I. - SZEREDI P.: PROLOG-kézikönyv. Számológép, 1977. 1-2.k. 123 p.

A PROLOG újelvü programozási nyelv teljes ismertetése, sok példával.

GÁSPÁR L.: Lineáris algebra példatár. Tankönyvkiadó, 1971. 266 p.

Az első öt fejezet gyakorlására kitünően használható.

HALL PARTEE, B.: Fundamentals of mathematics for linguistics. Dordrecht, Reidel, 1978. 242 p.

Ezt a könyvet azoknak ajánljuk a vizsgára való készüléshez, akik szeretik a részletező leirást és a sok példát: az első félévben lényegében a könyv egész anyaga tárgyalásra kerül.

HALMOS, P.R.: The basic concepts of algebraic logic. =American Mathematical Monthly. 53. 1956. 363-387.p.

E cikk gondolatmenetére támaszkodunk a kijelentéskalkulus tárgyalásánál: az érdeklődő olvasó itt a predikátumkalkulus hasonló felépitését is megtalálhatja.

HALMOS, P.R. - SIEGLER, L.G.: Elemi halmazelmélet - halmazelméleti feladatok. Müszaki Kiadó, 1981. 199 p.

E könyv első tizenhat fejezetének elolvasását, és a hozzájuk kapcsolódó feladatok megoldását minden hallgatónak ajánljuk: a halmazelméleti ismereteiket elmélyiteni vágyók pedig haszonnal tanulmányozhatják a többi fejezetet is.

HARRIS, Z.S.: Sturctural linguistics. University of Chicago Press, 1950. 384 p.

A deskriptiv nyelvészet módszertanát tárgyaló, alapvető jelentőségű munka (eredeti cime: Methods in structural linguistics): elolvasását minden nyelvészet iránt érdeklődő hallgatónak ajánljuk.

KEENAN, G.L.: A boolean approach to semantics. =GROGNENDIJK,J.A.G. - JANSSON, T.M.U. - STOKHOF, M.B.I. (szerk.): Formal methods in the study of language. I-II. Amsterdam, Mathematical Centre Tracts. 135. 1981. 343-380.p.

A Montague-grammatika ismertetésénél nagy mértékben támaszkodtunk erre a cikkre.

KEISLER, H.J.: Elementary calculus. Boston, Prindle, Weber and Schmidt, 1976. 880, 61 p.

Az analizis iránt érdeklődő hallgatónak elsősorban ezt a tankönyvet ajánljuk, mivel ez a hagyományos és a nemstandard megközelitést párhuzamosan tárgyalja, és nem igényel előismereteket. Az általunk tárgyalt anyag nem megy túl e könyv első három fejezetén: az itt található példák gyakorlásra kiválóan használhatók.

KEISLER, H.J.: Foundations of infinitesimal calculus. Boston, Prindle, Weber and Schmidt, 1976. 214 p.

Tanári segédkönyv Keisler (1976a)-hoz: olvasása (főképp algebrai) előismereteket igényel. A tananyag kialakításában különösen az 1,1*, 2A, és 3A-C fejezetekre támaszkodtunk.

A kibernetika klasszikusai. /Válogatott tanulmányok/. Gondolat, 1965. 263 p.

Azok számára, akik a gépek formális elmélete mögött meghúzódó "klasszikus" elképzelésekre kiváncsiak, alapvető olvasmány lehet Neumann J., Turing, Wilkes és Shannon cikke.

LÁBOS E.: Természetes és mesterséges értelem. Magvető, 1979. 148 p.

Tudományos-ismeretterjesztő mü az absztrakt gépfogalom és az emberi értelem kapcsolatáról. Elolvasása segitheti a "Gépek" témakör megértését és egyben illusztrálja is azt.

LAKATOS, I.: Biztonyitások és cáfolatok. Gondolat, 1981. 293 p.

Ezt a könyvet a matematika módszertana iránt érdeklődő hallgatóknak ajánljuk.

MANNA, Z.: Programozáselmélet. Müszaki Kiadó, 1981. 479 p.

A kiezámithatósággal, ill. a Turing gépek különböző megközelitéseivel foglalkozó 1. fejezet elolvasását ajánljuk elsősorban.

MAURER, I.Gy. - VIRÁG I.: A relációelmélet elemei. Kolozsvár, Dacia, 1972. 79 p.

E könyvecske anyagát tantervünk teljes mértékben lefedi: éppen ezért elolvasását minden hallgatónak ajánljuk.

MAURER I.Gy. - VIRÁG I.: Bevezetée a strukturák elméletébe. Kolozsvár, Dacia, 1976. 315 p.

Ebben a müben az általunk használt definiciók igen nagy része össze van gyüjtve: a 6. fejezet és 8.7-8.15 kivételével lényegében az egész itt leirt anyag tárgyalásra kerül. Tömör stilusa és áttekinthető felépitése miatt e könyvet különösen ajánljuk a vizsgára való készüléshez.

NEUMANN, J.: A számológép és az agy. Gondolat, 1972. 134 p.

Alapvető könyv a "Gépek" témakör jöbb megismeréséhez, bár a formalizmusok megértéséhez nem ad segitséget.

NIEVERGELT, J. - FARRAR, J.C. - REINGOLD, E.M.: Matematikai problémák megoldásainak számitógépes módszerei. Müszaki Kiadó, 1977. 264 p.

A "Mire képesek a gépek és mire nem?" c. fejezet egyfajta adalék a "Gépek" témakörhöz.

PIAGET, J. - FRAISSE, P. - REUCHLIN, M.: A kisérleti pszichológia módszerei. Akadémiai Kiadó, 1967. 262 p.

Ezt a könyvet (és különösen a 4. fejezetet) azoknak ajánljuk, akiket érdekel az empirikus tények és az absztrakt modellek közti kapcsolat problematikája.

PÓLYA Gy. - SZEGŐ G.: Feladatok és tételek az analizis köréből. 1-2.k. Tankönyvkiadó, 198o-81. 426 + 492 p.

Az analizis e klasszikus példatárának tanulmányozását csupán azoknak ajánljuk, akik a témakörben már megszerezték a szükséges alapismereteket, tehát pl. Keisler (1976a) vagy Rudin (1978) müvei mellett pl. Duncan (1974) könyvét is olvasták.

RÉNYI A.: Dialógusok a matematikáról. Akadémiai Kiadó, 1966. 163 p.

A matematika filozófiája iránt érdeklődő hallgatóknak ajánljuk ezt a könyvet.

ROBINSON, A.: Non-standard analysis. North-Holland, 1974. 293 p.

A nemstandard analizis első monografikus feldolgozása: tömörsége miatt a felkészülésben kevéssé használható, és az érdeklődő hallgatónak inkább Keisler (1976a)-t ajánljuk arra, hogy e témakörben ismereteit továbbfejlessze. Logika tananyagunk nagy részét azonban kitünően összefoglalják a 2.1. ...2.4, (2.6-2.7) fejezetek, és igen hasznos lehet a 10. (történeti) fejezet elolvasása is.

ROGERS, H.Jr.: Theory of recursive functions and effective computability. McGraw-Hill, 1967. 482 p.

A bevezető, valamint a rekurziv függvényekről szóló első és a megoldhatatlan problémákkal foglalkozó második fejezet jól érthető és kicsit részletesebb tárgyalása a tananyag megfelelő fejezeteinek.

RUDIN, W.: A matematikai analizis alapjai. Müszaki Kiadó, 1978. 356 p.

Ez az (előismereteket nem igénylő) tankönyv nem tárgyalja az infinitézimálisokat: az első öt fejezetből azonban az olvasó az általunk leadott anyagon jóval túlmenő ismereteket szerezhet.

SALOMAA, A.: Formal languages. New York, Academic Press, 1973. 322 p.

A tananyag e témaba vágó részét e könyv 1.–5. és 9. részei lefedik: az érdekődő olvasó azonban ennél jóval tovább mehet, mert a könyv nem tételez fel semmilyen előismeretet.

SNOW, C.P.: The two cultures and the scientific revolution. (The Rede lectures). Oxford, University Press, 1959.

A humán- és reáltudományok elszakadásának problémáját (tudtunkkal) elsőként elemző előadás.

SPERANZA, F.: Relációk és strukturák. Tankönyvkiadó, 1980. 218 p.

A tananyag tartalmazza az 5. és 7.1–7.2 fejezetek kivételével e könyv teljes anyagát: tanulmányozása (és a közölt nagyszámú példa megoldása) a félévi vizsgára való készüléshez komoly segitséget adhat.

SZABOLCSI A.: Megjegyzések a Montague-grammatikáról. =Nyelvtudományi Közlemények. 79. (1977). 157–175.p.

A Montague-grammatikának ma már hatalmas irodalma van: a témakör iránt érdeklődőknek érdemes ezzel a kitünő bibliográfiai tájékoztatást adó bevezetővel kezdenie.

TRAKHTENBROT, B.A.: Algoritmusok és absztrakt automaták. Müszaki Kiadó, 1978.

Az algoritmus fogalmáról és a Turing-gép programozásáról szóló fejezeteinek megértését több konkrét példával segiti.

TULLOCK,G. : Problems of majority voting. = The Journal of Political Economy. 67. (1959). 571-579.p.

Ez a cikk megtalálható Arrow-Scitovsky (1969)-ben is, ahol a kérdéssel még számos további tanulmány foglalkozik: ezek azonban tananyagunkon túlmenő matematikai előismereteket igényelnek.

VARGA L.: Rendszerprogramok elmélete és gyakorlata. Akadémiai Kiadó, 1978. 567 p.

A nyelvek és automaták kapcsolatát tárgyaló 1.6 és 1.7 fejezetet ajánljuk, de a számitógép felépitésével kapcsolatos ismeretek kiegészitésére a többi fejezet bevezető részei szintén hasznosak lehetnek.

VINOGRADOV, I.M.: A számelmélet alapjai. Tankönyvkiadó, 1950. 171 p.

Ezt a könyvet a természetes számok iránt érdeklődő hallgatóknak ajánljuk: bár tananyagukhoz szigorúan véve semmi köze nincs, az 1. és 3. fejezetek áttanulmányozása feltétlenül hozzájárul a rendezési- és kongruenciarelációkról tanultak jobb megértéséhez.